

# Alguns breves apontamentos sobre o tratado *De organica conicarum sectionum in plano descriptione* de Frans van Schooten

---

ENIO HENRIQUE DELEFRATE<sup>1</sup>

FUMIKAZU SAITO<sup>2</sup>

## Resumo

*O presente artigo resultados parciais de pesquisa em mestrado acadêmico, que se encontra em andamento, na qual se faz um estudo da abordagem de Frans van Schooten Jr.(1615 – 1660), em relação ao estudo de Secções Cônicas num tratado de 1646 intitulado De Organica Conicarum Sectionum in Plano Descriptione. Busca-se aqui apresentar o tratado ao leitor, bem como discorrer sobre os elementos que indicam as motivações que levaram van Schooten a escrevê-lo. Este trabalho circunscreve-se nas investigações de história da matemática desenvolvidas pelo grupo HEEMa (História e Epistemologia na Educação Matemática) e tem por objetivo, por meio da história das cônicas, levantar questões de ordem matemática e epistemológica que possam ser exploradas por professores de matemática.*

**Palavras-chave:** *Secções Cônicas, História das Cônicas, História da Matemática.*

## Abstract

*The present article shows partial results of an ongoing academic research in Mathematics Education which addresses to an approach given by Frans van Schooten (1615-1660) to the study of conics sections found in his work entitled De Organica Conicarum Sectionum in Plano Descriptione published in 1646. The aim of this paper is to present this treatise, as well as to show some elements that motivated van Schooten to published it. This article is part of an investigation on history of mathematics developed by HEEMa (History and Epistemology in Mathematics Education) and aims to raise some epistemological and mathematical issues, through history conics sections, that can be explored by math teachers.*

**Keywords:** *Conics Sections, Conics History, Math History.*

## Introdução

Este artigo tem por objetivo apresentar resultados parciais de uma investigação que faz parte de pesquisa de mestrado acadêmico em Educação Matemática, pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), que se encontra em andamento. Discorreremos aqui sobre um tratado dedicado à construção de cônicas (elipse, parábola e hipérbole) que foi publicado no século XVII por Frans van Schooten Jr (1615 – 1660). Intitulado *De Organica Conicarum Sectionum in Plano Descriptio*, este tratado se tornou o trabalho mais conhecido de van Schooten, tendo sido editado pela primeira vez em 1646 e posteriormente, em 1657, como parte de outro importante trabalho do mesmo

---

<sup>1</sup> Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Mestrando do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática – eniohd@ibest.com.br.

<sup>2</sup> Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática / Programa de Estudos Pós-Graduados em História da Ciência – fsaito@puccsp.br.

autor, intitulado *Exercitationes mathematicae libri quinque*<sup>3</sup>.

Embora pouco citado pelos livros de História da Matemática<sup>4</sup>, van Schooten foi um destacado e importante estudioso de matemáticas do século XVII sendo conhecido por ter publicado a versão latina de *La Géométrie*<sup>5</sup> de René Descartes (1596 – 1650), acrescida de importantes comentários, que facilitaram a ampla disseminação da geometria cartesiana entre os eruditos europeus, como observa Boyer:

*A La géométrie* de Descartes não fora publicada originalmente em Latim, a língua universal dos estudiosos, e a exposição não era clara; mas ambas as desvantagens foram superadas quando van Schooten publicou uma versão para o latim em 1649, junto com material suplementar. A Geometria a Renato Des Cartes (Geometria por René Descartes) de van Schooten apareceu numa versão muito ampliada em dois volumes em 1659 e 1661, e mais edições foram publicadas em 1683. Assim provavelmente não é exagero dizer que embora a geometria analítica fosse introduzida por Descartes, ela foi estabelecida por Schooten. (BOYER, 1999, p.255)

Van Schooten nasceu nos Países Baixos na cidade holandesa de Leiden, onde recebeu inicialmente uma educação informal, grande parte sob responsabilidade de seu pai Frans van Schooten Sr<sup>6</sup> (1581 – 1645), antes de ingressar na Universidade de Leiden, graduando-se nas artes liberais em 1635.

Como era comum naquela época, van Schooten viajou para diferentes países, principalmente França, onde tomou contato com os novos desdobramentos matemáticos. Na França, conheceu Marin Mersenne (1588 – 1648), padre que reunia e trocava correspondências entre estudiosos de diversas regiões, publicando as novidades ligadas à filosofia natural e matemática.<sup>7</sup>

Podemos dizer que van Schooten estava bastante familiarizado com as novidades matemáticas de seu tempo. Em sua juventude, ele foi instruído na escola de holandesa

---

<sup>3</sup> Maiores detalhes ver Sandifer (2010)

<sup>4</sup> Ver Eves (2004), Boyer (1996), Katz (1998)

<sup>5</sup> A esse respeito ver Boyer (1996)

<sup>6</sup> A partir de agora, designaremos por “Senior” ao pai de Frans van Schooten. Desse modo, Frans Van Schooten Sr (Sênior) refere-se ao pai e Frans Van Schooten, ao filho.

<sup>7</sup> A esse respeito, de acordo com Katz (1998), um grupo de matemáticos ligados a Mersenne, reunia-se regularmente para discutir novas idéias em matemática e física. Marin de Mersenne atuava recebendo correspondências de vários lugares, fazia cópias e as publicava. Assim, a maior parte do que ocorria novidades e trabalhos na área científica ficava conhecido no grupo ligado a Mersenne. Fazer parte do

de álgebra que, de acordo com Krüger (2016), ensinava a álgebra cossita<sup>8</sup>. Segundo Hoffmann (1975), van Schooten estudara também a edições francesa e holandesa das obras de Simon Stevin (1548-1620) dedicadas à aritmética, bem como outros trabalhos publicados por Albert Girard (1595-1632) e Samuel Marolois (1572-1627). Além disso, tinha bons conhecimentos de geometria, uma vez que estava familiarizado com os trabalhos de Arquimedes (287 aEC-212 aEC), Apolônio de Perga (262 aEC-194 aEC) e Pappus de Alexandria (c.290-350), editados por Federico Comandino (1509-1575), e também da geometria dos indivisíveis de Bonaventura Cavalieri (1598-1647). Posteriormente, depois de viajar para a França e Inglaterra, tomou conhecimento dos estudos de François Viète (1540-1603) e de Pierre de Fermat (1607-1665), bem como de outros estudiosos de matemáticas holandeses, como Constantijn Huygens (1596-1687), Christiaan Huygens (1629-1695), Jan de Witt (1629-1672) entre outros.

Durante sua vida, Van Schooten, entre outros trabalhos, parece ter publicado quatro livros. O primeiro foi uma coletânea de tabelas trigonométricas, publicado em 1645. Dentre essas obras, teve destaque uma coletânea de trabalhos intitulada *Collected Works of François Viète*, seu segundo livro, que foi publicado em 1646. De acordo com Sandifer (2010), esta obra fez com que as técnicas e notações algébricas de Viète fossem apreciadas por um grande público, e também deu notoriedade para van Schooten na comunidade de estudiosos de matemáticas. O terceiro livro foi a *Géométrie* de Descartes, que van Schooten traduziu para o Latim e o publicou com alguns comentários. A importância desse trabalho foi tão grande que van Schooten publicou ainda outras duas edições uma em 1659 e outra em 1661, esta última publicada após sua morte.

Van Schooten não se limitou a ser um divulgador dos trabalhos de grandes estudiosos de sua época. Suas contribuições originais para as matemáticas, segundo Hoffmann (1975), encontram-se no seu quarto livro intitulado *Exercitationes mathematicae libri quinque* publicada em 1657. Esta obra encontra-se dividida em cinco livros e tratam de diferentes assuntos: o Livro I trata de aritmética elementar e traz problemas de

---

círculo de Mersénne significava estar em contacto com os maiores avanços científicos da época.

<sup>8</sup> A Escola Holandesa de Álgebra, ensinava um tipo de álgebra conhecida como Cossista. Segundo Roque(2012), a álgebra do século XV e do início do século XVI era essencialmente a mesma dos árabes, com o recurso de um simbolismo (não unificado) tanto para incógnitas quanto para as operações. O termo “Coss”, vem da tradução do alemão para a palavra “coisa” (incógnita), e a prática de resolver equações ficou conhecida como arte “cossista”.

geometria; o Livro II é dedicado às construções utilizando apenas retas; o Livro III trata da reconstrução do *Plane Loci* de Apolônio tendo por base algumas sugestões dadas por Pappus; o Livro IV é uma versão revista de um estudo feito anteriormente por van Schooten sobre o traçado de cônicas de forma mecânica; e o Livro V traz uma coleção de problemas matemáticos.

O quarto livro desta obra é foco de nossa investigação de mestrado. Intitulado *De organica conicarum sectionum in plano descriptio*, este tratado foi originalmente publicado em 1646 e incorporado à *Exercitationes mathematicae libri quinque* em 1657. Dedicado ao conselho diretor da universidade de Leiden, este escrito introduz van Schooten na carreira universitária ao assumir a cadeira de professor de Matemática Holandesa:

[...] Tendo em vista, enfim, que havendo morrido meu pai, por vossa benevolência fui convocado a preencher o seu posto para professar estas disciplinas, julguei ser meu dever responder ao gesto com alguma prova de gratidão e dedicar aos vossos ilustres nomes aquilo que desenvolvi para uso público. Este humilde trabalho, portanto, Varões nobilíssimos e amplíssimos, recebi benignamente sob a vossa proteção: uma vez que vos oferece com toda a minha observância de espírito, determinai então, sob os vossos auspícios, que venha à luz depois de recebida minha dádiva de gratidão. Quanto ao mais, peço a Deus Ótimo e Supremo que vos conserve incólumes e afortunados por tanto tempo quanto possível. Entregava a Leyda nas Calendas de novembro do ano de 1646. *À vossa nobreza e amplitude devotíssimo, Francisco de Schooten (VAN SHOOTEN, 1646, p. 4, tradução nossa)*

O *De organica* versa sobre construções de elipses, parábolas e hipérbolas utilizando instrumentos mecânicos. Ele está organizado em quatorze capítulos, antecedidos por uma introdução e um prefácio ao leitor que ocupam quinze páginas. Ao longo desses capítulos, van Schooten discorre sobre as propriedades das cônicas, bem como apresenta diferentes instrumentos para traçar elipse, hipérbole e parábola.

Desse modo, os capítulos I, II e III tratam do que tomamos por liberdade chamar de modelos mentais de construção de elipses onde van Schooten começa a apresentar os conceitos geométricos que servem de base para a construção dos seus instrumentos mecânicos. Os capítulos IV e V se referem ao uso de instrumentos específicos para

construção de elipses. Seguem-se os capítulos VI e VII, em que ele trata de hipérbolos, apresentando no capítulo VI um modelo geométrico e, no capítulo VII, um instrumento de construção de hipérbolos.

Avançando mais, vemos que nos capítulos VIII e IX, van Schooten trata da construção de hipérbolos utilizando os focos como referência. Nos capítulos X e XI, ele trata de construção de elipses e hipérbolos com base em triângulos retângulos. O capítulo XII trata da construção de hipérbolos a partir de um ponto dentre posições assíntotas. Os capítulos XIII e XIV tratam de construção de parábolas. No capítulo XIII, van Schooten instrui como construir uma parábola a partir de um eixo, um vértice e dois lados perpendiculares entre si e, no capítulo XIV, fornece outras instruções para construir uma parábola a partir de um foco e um vértice. Aqui ele chama a atenção do leitor para as ideias de Arquimedes sobre quadraturas de parábolas. Enfim, além da parte destinada à construção de cônicas, o tratado traz um apêndice, contendo vinte e seis páginas sobre resolução de equações cúbicas.

## **1 Análise preliminar de *De organica conicarum***

O título completo da obra de van Shooten, como podemos ler no seu frontispício, é *Organica Conicarum Sectionum in Plano Descriptione, tractatus, Geometris, Opticis: Praesertim vero Gnomonicis & Mechanicis utilis*. O próprio título da obra sugere que este tratado é destinado não só para estudiosos de geometria, mas também para estudiosos de óptica e, principalmente, fabricantes de relógios solares e mecânicos. De fato, no prefácio, van Shooten deixa clara a necessidade que muitos ofícios tinham de desenvolver instrumentos mecânicos que descrevessem tais curvas com maior precisão e técnica:

[...] Por isso, nesta área também me propus trabalhar, para que as outras pudessem tornar-se comuns partícipes de algum benefício, e conduzi ao êxito o meu desígnio, principalmente porque havia observado que a descrição mecânica dessas linhas traria grande utilidade para o uso quotidiano, como para arquitetos, marceneiros e pedreiros na construção de estruturas de madeira e arcos de pedra necessários à sustentação de templos, edifícios, pontes, pórticos e câmaras, para o polimento de balaustradas, para a produção, sob diversos modos, de pequenas almofadas, topiárias em jardins, etc.

(VAN SCHOOTEN, 1646, p. 10-11, tradução nossa)

Van Schooten apresenta as várias utilizações das seções cônicas na óptica, tendo em consideração a importância que tinha os estudos de catóptrica, dióptrica e perspectiva naquela época. Na “Introdução”, ele ainda destaca o papel da geometria em várias áreas do conhecimento que vão desde dar suporte para quase a totalidade das ciências e orientação das técnicas da Mecânica até a fabricação das ferramentas voltadas para as práticas humanas em seu cotidiano. No que diz respeito à sua importância para o estudo da geometria, van Schooten exalta o trabalho dos geômetras gregos, fazendo referência ao trabalho de Euclides e de Apolônio sobre as seções cônicas.

Convém aqui observar que van Schooten teve acesso ao estudo de cônicas de Apolônio por meio de Jacob Golius (1596 – 1667), com quem teve aulas dos textos clássicos de geometria na Universidade de Leiden.<sup>9</sup> De acordo com Dijksterhuis (2011), Golius, reconhecido arabista holandês, teria ido em missão diplomática ao oriente onde recolhera um grande número de textos e dados sobre a ciência árabe. Em 1627, quando estava em Alepo, Golius teria encontrado um valioso manuscrito sobre as cônicas de Apolônio e copiado, trazendo-o para a universidade, onde foi estudado.

Um estudo preliminar mostra-nos que o estudo das cônicas de Apolônio fez van Schooten notar uma lacuna entre a geometria de Apolônio e a de Euclides, motivando-o a escrever o *De organica*. Segundo o próprio van Schooten, na sua época havia uma necessidade de representar as seções cônicas em superfícies planas. Sobre isso van Schooten afirma :

[...] Mas como, devido aos rigores do tempo, não chegaram até nós os escritos desses autores ou de seus sucessores – e nem ao menos se sabe (até onde eu tenha conhecimento) se ainda existem – nos quais se demonstre o modo pelo qual ditas Secções podem ser descritas com retas em um plano, descrição esta que tanto se requer na práxis quotidiana, impôs-se-me como objeto de estudo a criação de ferramentas ideais para tanto, bem como uma tentativa de demonstração, por método próprio, dos modos por que linhas cônicas possam ser descritas em um plano organicamente e em qualquer caso.(VAN SCHOOTEN, 1646, p.3, tradução nossa)

---

<sup>9</sup> Para maiores informações sobre a chegada dos trabalhos de Apolônio na Holanda, veja Dijksterhuis (2011)

Note que nesta passagem, van Schooten expressa a sua preocupação em representar as cônicas, observando que, até onde ele sabia, não havia ainda notícias de um método ou forma de traçá-las. Enuncia também a necessidade de buscar algum recurso em traçá-las por razões práticas, uma vez que a fabricação de instrumentos diversos, principalmente relógios, e outros artefatos, como as lentes, requeriam conhecimento mais preciso do traçado de elipse, hipérbole e parábolas. Além disso, deixa aqui claro a sua real intenção com essa obra, ou seja, a de apresentar ao leitor as “ferramentas ideais” e “demonstrar os modos por que linhas cônicas possam ser descritas em um plano”.

Trazendo os vários estilos de matemática que tinha encontrado durante seus anos de formação com seu pai e com Golius, van Shooten, utilizando seus conhecimentos adquiridos, procurou elaborar um procedimento para traçar as cônicas, de outra maneira. No que diz respeito ao tratamento dado às cônicas por Euclides, van Schooten descreve em seu prefácio ao leitor que:

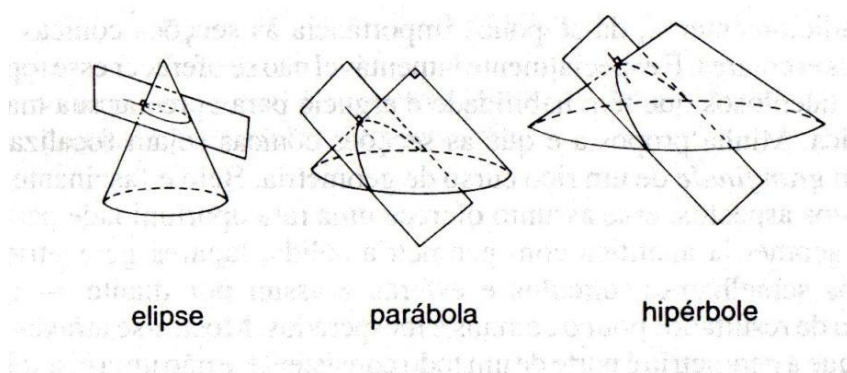
[...] Entre aqueles que abordaram o assunto, não se encontra nenhum anterior a Euclides, que definiu o Cone a partir da circunvolução do triângulo retângulo permanecendo imóvel um dos lados que se encontram em torno do ângulo reto, estabeleceu três diferentes espécies de cones segundo a tríplice diferença dos ângulos no vértice e, depois, seccionou cada um desses três num plano horizontal sobre um dos lados do cone, obtendo então daquelas três seções os cones retângulo, obtusângulo e acutângulo. *Conica Elementa*. (VAN SCHOOTEN, p. 5, 1646, tradução nossa)

Essa passagem pode ser representada pela figura 1, em que podemos observar as seções ou os cortes feitos em três cones formados a partir de três triângulos retângulos. Diferentemente, no que se refere ao tratamento dado por Apolônio, van Schooten relata que:

[...] Apolônio, posteriormente, definiu o cone de forma mais compreensiva a partir da conversão de uma reta indefinida em torno da circunferência do círculo atravessando, em seguida, um ponto na altura até retornar ao lugar de onde iniciara seu movimento, e descobriu que em todo cone, tanto o reto, como o escaleno, se encontra universalmente cada uma das três seções mencionadas, de acordo com as diversas perspectivas em que o plano secciona o cone.

Foi também ele quem chamou às secções previamente mencionadas os seguintes nomes: à secção do cone retângulo, parábola; à do obtusângulo, hipérbole; à do acutângulo, elipse; dando a cada uma dessas três um nome derivado de seu acidente próprio, como se pode aprender de qualquer dos seus livros que se intitulam *Conica Elementa*.(VAN SCHOOTEN, 1646, p.6, tradução nossa)

**FIGURA 1** – Seções cônicas segundo Euclides



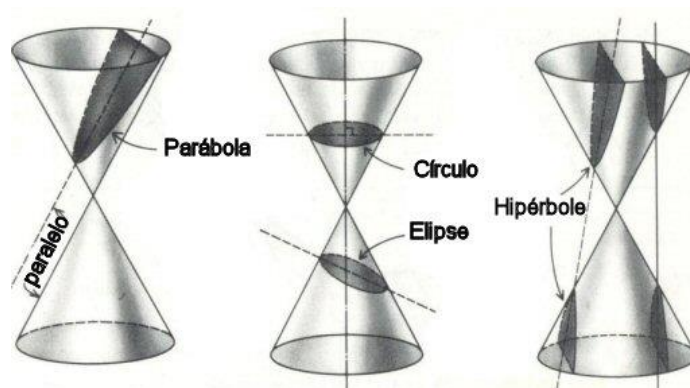
Fonte: <<http://www.sato.prof.ufu.br/Conicas/node2.html>>

Partindo dessas considerações feitas por van Schooten em 1646 e analisando as quatorze primeiras proposições das cônicas de Apolônio<sup>10</sup>, notamos que antes de Apolônio as seções cônicas (elipse, parábola e hipérbole) eram obtidas pelo corte de três tipos de triângulos diferentes, como descrito por Euclides. Diferentemente, Apolônio teria mostrado que bastava apenas um único cone para obtê-las, uma vez que elas eram obtidas por meio da variação do ângulo de inclinação do plano secante, como podemos ver na figura 3.

Esses dois tratamentos foram considerados por van Schooten na elaboração de seu tratado, que deu às cônicas outra abordagem. Diferentemente do processo descrito pelos antigos gregos, van Schooten propôs traçar as cônicas por um movimento contínuo, por meio do uso de instrumentos, e não gerá-las a partir de um corte num sólido, no caso, num cone. Desse modo, o *De organica* propunha utilizar instrumentos específicos para construir essas figuras no plano.



**FIGURA 2** – Representação das cônicas segundo Apolônio.



Fonte: <<http://astro.if.ufrgs.br/kepleis/node5.htm>>

Aqui convém observar que houve muitas iniciativas de desenvolver métodos para desenhar as cônicas no plano. Um deles é o método desenvolvido por Mydorge cuja proposta consistia em traçar as cônicas por meio de marcação de pontos, que foi criticado por van Schooten em seu prefácio. Vejamos o que ele diz em suas observações:

[...] Já em relação ao método pelo qual essas linhas devem ser escritas em um plano por pontos, sobre o qual o ilustríssimo D. Mydorgius compôs um livro inteiro, quando precisam ser exibidas em tamanho maior, como em paredes, vias, calçadas ou jardins (o que se requer com frequência em gnômica e mecânica), isso não ocorre de modo igualmente fácil e mecânico, como é possível discernir, logo a princípio, em relógios de Sol assim construídos, se notarmos quão erroneamente são projetados com frequência, uma vez que tal método frequentemente requer a determinação repetida de pontos e a habilidade de uma mão experiente, como também que, para a explicação exata do trabalho, a natureza das mesmas linhas seja trazida a lume. [...](VAN SCHOOTEN, 1646, p.12, tradução nossa)

Van Schooten termina o prefácio da obra mencionando ter utilizado o método dos

---

<sup>10</sup> Sobre as cônicas de Apolônio, ver Tagliaferro, (1952, p.603-621)

indivisíveis de Cavalieri para determinar as áreas das regiões delimitadas pelas seções cônicas e que, para determinar tangentes, quadraturas e centros de outros tipos de curvas de grau superior às cônicas dever-se-ia consultar os trabalhos de Descartes, Tholofanus e Robervall.

## Considerações finais

Até aqui nossa pesquisa se ateve ao aspecto histórico das Secções Cônicas, procurando verificar as diferenças entre os tratamentos dados por Apolônio e van Schooten às mesmas.

No momento estamos iniciando a análise matemática dos capítulos I e II do *Organica*, em que van Shooten trata de instrumentos imaginários, procurando inicialmente identificar as funções de cada parte dos instrumentos propostos em cada capítulo. Buscaremos as relações matemáticas incorporadas em cada parte do instrumento e nos processos geométricos utilizados.

## Referências

- BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2ª ed. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.
- DIJKTERHUIS, F. J. Moving around the Ellipse. Conic Section in Leiden, 1620-1660. In: DUPRÉ, S.; LÜTHY, C. (Eds.). **Silent Messengers: The Circulation of Material Objects of Knowledge in the Early Modern Low Countries**. Berlin: Lit Verlag, 2011. p. 89-124.
- EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Trad. Higyno H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.
- HOFFMANN, J. E. Schooten, Frans Van. In: GILLESPIE, C. C. (ed.). **Dictionary of scientific biography**. New York: Scribner 1975, Col. XII, p. 205-207.
- KATZ, V. J. **A History of Mathematics**. Glenville: HarperCollins College Publishers, 1993.
- KRÜGER, J. Algebra in Dutch education, 1600 – 2000. Disponível em <<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01288391/document> > Acesso em 20/03/2017
- ROQUE, T. **História da Matemática: Uma visão Crítica**. Desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2012.
- SANDIFER, C.E. *Van Schooten Rullers Construction*. Disponível em: <<http://www.maa.org/book/export/html/116052> > Acesso em 19/01/2017.
- TAGLIAFERRO, R. C. Conics I. In: *Euclid. Archimedes. Apollonius of Perga. Nichomachus*. Chicago, London: The University of Chicago Press, 1952. p. 604-621.
- VAN SCHOOTEN, F. **De Organica Conicarum Sectionum in Plano Descriptione. Tractatus**. Batavor: Officina Elzeviriorum, 1646.