

## Um panorama das pesquisas a respeito de área de triângulos

---

CAROLINE RODRIGUES DA SILVA FONDA<sup>1</sup>

MARIA JOSÉ FERREIRA DA SILVA<sup>2</sup>

### Resumo

*Este artigo apresenta uma pesquisa bibliográfica que tem como objetivo apresentar um panorama das investigações já realizadas a respeito de áreas de triângulos na tentativa de identificar os principais desafios das pesquisas futuras neste segmento. Após fazer o levantamento das pesquisas no Banco de Teses da CAPES, detectamos oito trabalhos de 1998 até 2017 e concluímos que as que tratam de análise de livro didático apontam para um trabalho numérico e não favorecem a compreensão da noção de grandeza; as que tratam do tema com alunos apontam que estes confundem área e perímetro, apresentam mais dificuldade com figuras triangulares e que utilizam as fórmulas mecanicamente; as que tratam de formação de professores mostram que eles possuem uma abordagem tecnicista para o ensino do tema. Há carência de trabalhos nas duas últimas categorias.*

**Palavras-Chave:** Grandeza geométrica; Área de triângulo; Área enquanto grandeza.

### Abstract

*This article presents a bibliographic research that aims to introduce an overview of previously carried out investigations on the area of triangles in the attempt to identify the main challenges future researches will face in this segment. After collecting data in CAPES bank of dissertations, eight papers between 1998 and 2017 were detected and it was concluded that those which cover textbook analyses indicate a numerical work, with no benefit to the comprehension of the notion of greatness; those covering the topic directly with students indicate that learners: mistake area for perimeter, show more difficulties with triangle figures and use the formula mechanically; and those which cover teacher training indicate that educators have a technical approach to instruct the subject. There is lack of papers in the last two decades.*

**Keywords:** Geometric greatness. Area of the triangle. Area as greatness.

### Introdução

As grandezas estão presentes em todo o ensino básico, e de acordo com a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017), elas são essenciais para a compreensão da realidade, além de proporcionar a integração entre a Matemática e outras áreas de conhecimento, como Ciências ou Geografia, ou entre assuntos matemáticos como a ampliação e consolidação da noção de número, a aplicação de noções geométricas e a

---

<sup>1</sup> Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PEPG em Educação Matemática – e-mail: crs.93@hotmail.com.

<sup>2</sup> Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PEPG em Educação Matemática – e-mail: zeze@pucsp.br.

construção do pensamento algébrico.

O conceito de área é um dos mais significantes durante a aprendizagem de Matemática. Sua relevância, de acordo com Bellemain (2002), é essencial para a formação do cidadão, que precisa medir, ou estimar a medida, de regiões planas durante suas tarefas rotineiras, ou no campo científico e tecnológico, em situações em que a área de superfícies interfere como grandeza básica do processo ou fenômeno tratado.

Porém, avaliações como o PISA<sup>3</sup> 2015, nos mostram que tal objetivo não tem sido alcançado pelos alunos, já que os maiores índices de erros e dificuldades são apresentados nos itens que envolvem grandezas e medidas geométricas. Tal avaliação objetiva verificar a capacidade dos alunos de solucionar problemas foram categorizados quatro tipos de conteúdo (“mudanças e relações”, “quantidade”, “espaço e forma” e “incerteza e dados”). A categoria com maior nível de dificuldade foi “Espaço e forma”, apresentando o maior valor de Delta<sup>4</sup> em quase todos os países e estados brasileiros. Segundo o documento Brasil no PISA 2015 (BRASIL, 2016, p.156), esta categoria “envolve uma ampla gama de propriedades encontradas em vários lugares no mundo físico e visual; trabalha-se, por exemplo, com as propriedades das figuras geométricas como perímetro ou área, as características das figuras espaciais etc.”

Em relação ao letramento matemático, definido pelo PISA 2015, como a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a matemática, a categoria “formular” teve o maior índice de dificuldade. Segundo Brasil (2016, p. 158), estes resultados nos mostram que os estudantes apresentam dificuldades em “identificar oportunidades para usar a matemática em situações-problema e depois providenciar a estrutura matemática necessária para formular esse problema contextualizado matematicamente”. Teles (2007) constatou tal dificuldade durante a aplicação de alguns testes e percebeu que na tentativa de facilitar a resolução das situações-problema, os alunos recorriam à cálculos numéricos ou ao uso de figuras.

Diante deste cenário, resolvemos fazer um estudo das pesquisas que tratam áreas de figuras planas, em especial os triângulos no sentido de verificar as contribuições sugeridas para este tema. Para isso realizamos uma pesquisa de cunho bibliográfico que,

---

<sup>3</sup> O *Programme for International Student Assessment* (PISA) – Programa Internacional de Avaliação de Estudantes – é uma iniciativa de avaliação comparada, aplicada de forma amostral a estudantes matriculados a partir do 7º ano do ensino fundamental na faixa etária dos 15 anos.

<sup>4</sup> O índice Delta é uma medida transformada do percentual de acerto dos itens utilizada pelo *Educational Testing Service* (ETS) para o nível de dificuldade. (MATSUMOTO; VAN DE VIJVER, 2010 apud

segundo Macedo (1994, p. 13) “é a busca de informações bibliográficas, seleção de documentos que se relacionam com o problema de pesquisa (livros, verbetes de enciclopédia, artigos de revistas, trabalhos de congressos, teses, etc.)”. Para guiar nossas análises buscamos um referencial teórico a respeito de área que apresentaremos na sequência.

## 1 Referencial teórico

Trabalhos de Douady e Perrin-Glorian (1989) são uma referência para a compreensão de área como grandeza e não apenas como número. Para as autoras, de acordo com Bellemain (2002) o trabalho com essa noção deve ocorrer com a mobilização de três quadros<sup>5</sup>:

- o geométrico que é constituído por superfícies planas;
- o numérico composto de medidas da área das superfícies que pertencem ao conjunto dos números reais não negativos;
- o das grandezas formado por classes de equivalência de superfícies de mesma área integrando assim os dois primeiros e se configurando como contexto próprio da noção de área.

Ampliando tal noção Bellemain (2002) acrescenta o quadro algébrico funcional que é constituído por fórmulas que expressam a área em função de determinados comprimentos relativos às figuras geométricas. Para as três autoras uma hipótese didática básica é a necessidade de distinguir e articular esses quadros no ensino de grandezas geométricas.

Considerar área como grandeza, de acordo com Teles (2007) é fundamental, inicialmente, para diferenciar figura de medida de área (pois figuras diferentes podem ter a mesma medida de área) e também área de número (pois se medirmos a área de uma superfície com unidades diferentes, obteremos números diferentes).

Por outro lado, para Chevallard (1990), quando escolhemos trabalhar com um determinado conjunto de dados de um objeto matemático, deve ser possível exprimir todo “elemento”, ou seja, todos os parâmetros deste objeto. Para o autor se um triângulo é conhecido pelas medidas de seus lados, deve ser possível expressar sua área, mediana,

---

BRASIL, 2016, p.153).

<sup>5</sup> Alusão à teoria dos jogos de quadros e dialética ferramenta-objeto desenvolvida por Douady (1987 apud BELLEMAIN, 2002).

alturas, bissetrizes, etc., com o auxílio dessas medidas. Acrescenta que ao buscar expressar os diversos parâmetros de um triângulo podemos enfrentar o problema de passar da medida de um ângulo para a medida de um comprimento, ou ainda para as funções trigonométricas “enquanto a determinação de ângulos a partir de comprimentos coloca em jogo somente funções “algébricas” ao fazer intervirem adição, multiplicação e raiz quadrada.” (Ibid, p. 10, tradução nossa).

O autor acrescenta ainda que se tomarmos o caminho inverso aparecerão questões que não foram trabalhadas ao longo dos estudos o que configura uma deficiência no domínio matemático que pode tornar-se um empecilho para o conhecimento e a possibilidade de trabalho com todos os parâmetros de um determinado objeto.

Assim, com esse referencial como base de análise, no que segue apresentaremos a análise dos trabalhos encontrados em nosso levantamento.

## **2 Apresentação e análise dos trabalhos**

As dissertações e teses usadas neste trabalho foram selecionadas por meio de buscas em bibliotecas digitais, como o banco de teses da CAPES, a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), e as bibliotecas de programas brasileiros de pós-graduação em Educação e em Educação Matemática. Com o propósito de realizar um levantamento das pesquisas que abordassem a área de triângulos, utilizamos os termos: "triângulo", “área” e "grandeza geométrica" durante nossa busca.

Como resultado encontramos oito trabalhos que foram categorizados como apresentado no quadro 1, onde vemos que a maioria foi desenvolvido na Universidade Federal de Pernambuco, inclusive o de Teles (2007) que foi a única tese de doutorado encontrada.

A partir dessa categorização faremos uma síntese de cada um, por categoria, e traçaremos nossas considerações.

Na categoria, **Análise de Livros Didáticos**, Barros (2006) objetivou analisar a abordagem das relações entre área e perímetro, em Livros Didáticos de Matemática (5ª à 8ª série) do Ensino Fundamental tendo como referencial teórico a noção de área enquanto grandeza de Douady e Perrin-Glorian (1989). O autor constatou que os livros didáticos exploram o cálculo de área e perímetro em função de outros conteúdos, tais como: potências, cálculo numérico, cálculos algébricos e teorema de Pitágoras. Notou também que a grandeza área aparece com maior predominância em atividades a respeito

de frações de quantidade contínua, representada geometricamente por retângulos, círculos e polígonos regulares.

**Quadro 1:** Categorização dos trabalhos encontrados

Categoria	Autor	Ano	Instituição
Análise de Livros Didáticos	Barros	2006	Universidade Federal de Pernambuco
	Santana	2006	Universidade Federal de Pernambuco
	Maia	2008	Universidade Federal de Santa Catarina
	Silva	2011	Universidade Federal de Pernambuco
Formação de Professores	Chiummo	1998	PUC-SP
	Lessa	2017	Universidade Federal da Bahia
Sequência de Ensino	Facco	2003	PUC-SP
Reflexão teórica	Teles	2007	Universidade Federal de Pernambuco

**Fonte:** produção dos autores.

O autor ressaltou que as coleções que trazem uma definição para grandeza apresentam-na como sendo tudo aquilo que pode ser medido, indicando que pode prevalecer o aspecto numérico no tratamento dessas noções e destaca que “a noção de área surge definida como medida de superfície, enquanto que perímetro é conceituado como sendo a medida do comprimento do contorno” (Ibid, p. 190).

A respeito das unidades de medida, o autor observa que o uso de unidades de medida não convencionais é abordado por algumas das coleções investigadas, especialmente, em malhas quadriculadas. A associação entre a unidade de medida metro quadrado e o quadrado de lado medindo 1 metro foi feita de forma inicial por cinco das sete obras estudadas pelo pesquisador. Acrescenta que, quatro coleções fornecem atividades que favorecem cálculos de medida de área e perímetro e, ainda, que cinco apresentam fórmulas para esses cálculos nos livros de 5ª série (atual 6º ano) enquanto as outras exploram o cálculo de medidas de áreas por meio de decomposição e recomposição de figuras deixando as fórmulas para o volume da 7ª série (atual 8º ano) após o estudo de adição e multiplicação algébrica.

O autor afirma que as coleções analisadas apresentam o retângulo sempre com o lado de

medida maior na horizontal e o outro lado na vertical, sendo este o tipo de figura mais explorado, seguido do quadrado, triângulo retângulo e do paralelogramo (com o lado de medida menor sempre inclinado para a direita).

Em suas considerações finais conclui que:

embora tenha se observado inadequações do ponto de vista da base teórica e algumas obras não apresentam diversidade com respeito aos tipos de figuras usadas, constatamos atividades que podem contribuir tanto para os conceitos de área e perímetro enquanto grandezas, quanto para dissociação entre essas noções. (BARROS, 2006, p. 192).

Por outro lado, Santana (2006) analisou seis coleções de livros didáticos atuais de matemática, para os anos finais do ensino fundamental, buscando verificar se utilizam tangran, poliminós ou malhas como recursos didáticos para a construção do conceito de área, como grandeza geométrica baseando-se também em Douady e Perrin-Glorian (1989).

Observou que todas as coleções analisadas apresentam a malha quadriculada e o tangran nos capítulos dedicados ao estudo de área de figuras geométricas, enquanto os poliminós só aparecem em uma delas. Esses recursos são utilizados para a comparação de área entre figuras planas, ou para sua produção; para a criação de classes de equivalência de área e para as medidas de áreas não convencionais a partir da escolha de diferentes superfícies unitárias de acordo com o recurso utilizado. No entanto, observou que tais recursos didáticos não são adequadamente explorados em alguns dos livros, principalmente, na construção do conceito de área como grandeza geométrica.

Santana (2006, p. 148) também observou que os livros didáticos “favorecem o estudo da medida de área em detrimento do estudo das grandezas” embora, proponham o trabalho com geometria e grandezas para todos os anos do ensino fundamental. Acrescenta, em suas considerações finais, que o estudo de área é apresentado, na maioria, nos últimos capítulos e o uso do recurso didático enfatiza a medida convencional de área.

Com outro foco de análise Maia (2008) teve como objetivo estudar as organizações didáticas apresentadas em dois livros didáticos de 7ª série (atual 8º ano) para o ensino de triângulos, baseando-se na Teoria Antropológica do Didático de Chevallard.

A autora identificou, nos dois livros, entre as tarefas relacionadas à triângulos apenas duas que tratam de sua área. A primeira é: “*ensinar a fórmula para o cálculo da medida*

*da área de uma região triangular*” que no primeiro livro, segundo a autora, é resolvida a partir do cálculo da medida da área de um paralelogramo e no segundo, a partir da composição de um paralelogramo a partir de dois triângulos e com isso, ambos determinam a fórmula para o cálculo da medida da área de um triângulo, como sendo a metade do produto das medidas de um lado e de sua respectiva altura.

A segunda tarefa, que aparece em apenas um dos livros, consiste em “*ensinar a fórmula de Heron para o cálculo da medida de área de regiões triangulares*” em que o autor relembra a fórmula já discutida  $A = \frac{b \cdot a}{2}$ , em que  $b$  representa a medida de um dos lados do triângulo e  $a$  sua respectiva altura, e apresenta a nova fórmula:  $A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$  em que  $p$  representa o semiperímetro do triângulo.

A autora considera que os dois livros apresentam discursos tecnológicos-teóricos articulados aos momentos de emergência da técnica, além da institucionalização das fórmulas.

Nesse mesmo referencial, adotando a Teoria Antropológica do Didático, Silva (2011) analisou dezesseis livros do sexto ano do ensino fundamental aprovados no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) dos anos de 2008 e de 2011 para observar as abordagens dadas à comprimento, perímetro e área. Nos capítulos referentes ao estudo de área de figuras planas, o autor afirma que o foco está na medida embora algumas coleções apresentassem tendência em abordar a área enquanto grandeza.

Acrescenta que o tipo de tarefa predominante era “*calcular a área de figuras planas*” resolvidas tanto pela contagem das superfícies unitárias necessárias para ladrilhar a figura plana, quanto pelo uso de fórmulas. Dessa tarefa o autor apresenta três subtarefas específicas para triângulos. A primeira “*calcular a área de um triângulo conhecendo o comprimento de um de seus lados tomado como base e da altura relativa a essa base*”; a segunda “*calcular a área de um triângulo equilátero conhecendo seu perímetro e o comprimento da altura*” e, a terceira “*calcular o comprimento da altura de um triângulo conhecendo sua base e sua área*” afirmando que nos livros analisados os autores apresentam situações com unidade de medida convencional.

O autor afirma ainda que os conteúdos de geometria e de grandezas e medidas são apresentados nos últimos capítulos dos livros e que a maioria dedica menos de 15% do conteúdo apresentado especificamente a grandezas e medidas. Em seu mapeamento dos tipos de tarefa apresenta algumas tendências nas coleções analisadas. São elas:

- o foco da maioria das discussões envolve a medida trazendo uma lacuna nas discussões envolvendo as grandezas;
- o campo numérico é o mais privilegiado, apesar de percebermos indícios de melhora em relação a tipos de tarefa envolvendo a interação com outros campos;
- uma ênfase nas situações de medida e de conversão de medida;
- as situações de comparação ainda permanecem com um quantitativo preocupante, principalmente se essas situações não envolvem medida;
- as situações de produção nas obras analisadas são poucas em relação aos capítulos de perímetro e área não identificando nenhuma situação no capítulo de comprimento;
- o trabalho com estimativas e aproximações nas obras está no início em alguns LD e em outros não iniciou ainda. (SILVA, 2011, p. 165).

Estas análises de livros didáticos apontam que no ensino de área prevalece o aspecto numérico, tendo foco a medida e não a exploração e utilização de unidades de medidas não convencionais, o que não contribui para a construção do conceito de área como grandeza geométrica. Quanto ao cálculo da medida de área de triângulos, notamos que a fórmula  $A = \frac{b \cdot h}{2}$  predomina sobre qualquer outro meio para determinar tal medida.

Quanto aos trabalhos que tratam de **formação de professores do ensino fundamental** temos Chiummo (1998) que tinha como objetivo capacitar professores para abordar área enquanto grandeza no sentido de Douady e Perrin-Glorian. Para tal desenvolveu e aplicou uma sequência didática

Como estudos preliminares a autora aplicou um questionário para professores e constatou que eles não desenvolvem nos alunos uma concepção do conceito de área que permita relacioná-lo com suas diferentes representações numéricas e, ainda, que não utilizam a história da matemática para introduzir o conceito de área. Analisou ainda livros destinados às 3ª e 4ª séries do Ensino Fundamental (atuais 4º e 5º anos) e constatou que iniciam o ensino de área e perímetro por meio de fórmulas, ou por ladrilhamento, enquanto que os volumes dedicados aos anos finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º anos) se dividem entre os que apresentam diretamente as fórmulas para o cálculo da medida de área e perímetro, o que dificulta sua construção de forma autônoma pelos alunos, e os que iniciam o ensino por composição e



decomposição de figuras. Para a autora, “nenhum dos livros analisados traziam a parte histórica [...] de forma igual aos papiros, alguns livros trazem a fórmula pronta apresentando-a aos alunos como único método de resolução.” (CHIUMMO, 1998, p. 47) e acrescenta que “se o conceito de área for passado através das fórmulas, os professores deixarão de explorar as concepções espontâneas que os alunos trazem antes de conhecerem o conceito em questão” (Ibid, p. 30).

A autora desenvolveu a capacitação de professores baseada em cinco hipóteses:

**HIPÓTESE (1):** A abordagem proposta por certos professores não desenvolve nos alunos uma concepção do conceito de área que permita relacionar o conceito de área e suas diferentes representações numéricas.

**HIPÓTESE (2):** Uma capacitação para os professores que considera os aspectos estudados pode induzir os professores a construir situações de ensino-aprendizagem do conceito de área que levem os alunos:

1- a desenvolverem a noção de superfície e área trabalhando o ladrilhamento, a composição e a decomposição;

2- a sentirem, após esse estágio, a necessidade de passar do quadro geométrico para o quadro numérico, apresentando-lhes as fórmulas do conceito em questão.

**HIPÓTESE (3):** É indispensável diferenciar área de perímetro, para uma melhor aquisição do conceito de área.

**HIPÓTESE (4):** Um estudo das fórmulas de área e de perímetro de superfícies usuais, feito em relação com os invariantes geométricos das figuras, favorece a construção da noção de área como grandeza.

**HIPÓTESE (5):** A construção de situações para sala de aula nas quais o ponto de vista dinâmico intervém favorece o estudo dos invariantes geométricos que permitem conservar uma área e por conseqüência, a aprendizagem do conhecimento relacionado a comprimento e áreas. (CHIUMMO, 1998, p. 56).

Em suas análises a pesquisadora constatou, a respeito da hipótese 1, que os professores que seguem uma linha mais tradicional de ensino não mudam de postura, e a abordagem que adotam não permite que os alunos relacionem o conceito de área e suas diferentes

representações numéricas. A autora valida a hipótese 2, quando constata que os professores, que desconheciam o ladrilhamento e a composição e decomposição de figuras, aprovaram tais métodos, mas necessitaram passar do quadro geométrico para o numérico na busca de fórmulas para o cálculo da medida de área. Além disso aplicaram, em sala de aula, a sequência desenvolvida na formação. Quanto a hipótese 3, a pesquisadora considerou que as atividades apresentadas aos professores solucionaram a confusão entre área e perímetro. A hipótese 4 foi validada para todos os professores, por meio das últimas atividades da sequência que abordavam o cálculo de medida de área de triângulos, paralelogramos e trapézios; a relação entre o trinômio quadrado perfeito e áreas e a relação entre o teorema de Pitágoras e áreas de figuras planas. Para a última hipótese, a autora constatou que a elaboração de situações para sala de aula, em que o ponto de vista dinâmico intervém, facilitam o estudo de invariantes geométricos que possibilitam conservar uma área, resultando na aprendizagem do conhecimento relacionado a comprimento e áreas.

Chiummo (1998, p. 136) acrescenta que os professores que se baseiam nas “concepções espontâneas dos alunos conseguem mostrar para eles qual a relação entre comprimento e área, pois trabalham o concreto, as concepções espontâneas e fazem o jogo de quadros.”

Por sua vez, Lessa (2017) construiu um Modelo Epistemológico de Referência e um Modelo Epistemológico Dominante, considerando as incompletudes do trabalho institucional, a respeito do ensino de área, que serviu de base para a construção de um Percorso de Estudo e Pesquisa (PEP) durante a formação de dois professores do 6º ano do ensino fundamental com o intuito de integrar novos elementos na bagagem praxeológica desses professores durante a elaboração conjunta de uma sequência de ensino.

Para identificar o Modelo Epistemológico Dominante, além de analisar documentos oficiais, a pesquisadora realizou a análise de dois livros didáticos, voltados para esse ano escolar, adotados pelos colégios que participaram de sua pesquisa. Assim como Silva (2011) e Santana (2006), ela constatou que os capítulos dedicados ao estudo de área se localizam no final dos livros didáticos, e considerando que muitos professores seguem a ordem apresentada pelos livros, concluiu que “esse conteúdo pode não ser oferecido por muitos educadores ou considerado um conteúdo de pouca relevância” (LESSA, 2017, p. 104). “*Calcular medidas de área de uma região plana*” foi a tarefa

mais enfatizada por um dos livros resolvida pelas técnicas de composição e decomposição, ladrilhamento e/ou contagem ou fórmula. No outro exemplar, a tarefa com maior destaque foi “*transformar unidade de medida de área da superfície plana*” resolvida por multiplicação ou divisão por potências de 10. A autora conclui que o foco dos livros analisados está no bloco do saber-fazer, pois não há justificativas explícitas do “como fazer” que conduziria a identificação do bloco tecnológico- teórico.

Ao iniciar a formação a pesquisadora observou que os professores utilizavam uma única técnica para resolver as tarefas propostas e não apresentavam justificativas para as técnicas aplicadas, além disso que “os professores adotavam nas suas aulas um comportamento tecnicista, dando evidência ao saber-fazer (tarefas e técnicas); esses elementos, ainda que sejam imprescindíveis, não instituem o saber” Lessa (2017, p. 181). Analisou ainda cinco cadernos de alunos onde observou que utilizavam os mesmos procedimentos de seu professor, o que evidenciou a dependência e a reprodução do que lhes foi ensinado. Para a autora tais escolhas podem levar a valorização do aspecto numérico, o que dificulta a construção do conceito de área.

A pesquisadora construiu juntamente com os professores uma sequência didática (SD) para o ensino de área de figuras planas, baseada em Facco (2003) e a comparou com o Modelo Epistemológico Dominante e o Modelo Epistemológico de Referência e constatou que “a SD desenvolvida apresenta um conjunto de tarefas que representa as situações de medida de área, comparação de superfície e mudança de unidade, amparadas nas pesquisas de Baltar (1996), Bellemain (2000) e Ferreira (2010) (LESSA, 2017, p. 173). Acrescenta que entre as tarefas propostas aparecem tanto as que mobilizam diversas respostas, quanto respostas abertas. Além disso, os professores passaram a olhar de maneira diferente e mais aprofundada para o ensino de área a partir do PEP e da elaboração de tal sequência.

Podemos observar a partir desses dois trabalhos que faltam pesquisas dedicadas à formação de professores, tanto inicial, quanto continuada, que indiquem mais caminhos para o professor não adotar uma abordagem tecnicista para o trabalho com áreas.

O único trabalho que aplicou uma **sequência didática** para o ensino de área temos Facco (2003), que apresentou uma proposta para o ensino de área, para alunos de 5ª série do ensino fundamental (atual 6º ano), por meio de atividades que tratam área enquanto grandeza com o intuito de ajudar o professor a ensinar esse conteúdo e, o

aluno, a aprender. Para isso, a autora adota como fundamentação teórica a noção de área como grandeza de Douady e Perrin-Glorian além da Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval.

Antes da aplicação da sequência a autora realizou um diagnóstico com os alunos sujeitos da pesquisa em que identificou um grau de dificuldade relevante para diferenciar perímetro de área. A autora apresenta, e valida em seu trabalho, duas hipóteses: a escolha de situações-problemas que envolvem a determinação da medida de área de polígonos possibilita comparações destas figuras, baseando-se no conceito de área quanto grandeza; o uso de uma sequência de atividades relacionada à composição e decomposição de figuras planas, favorece a aprendizagem do conceito de área.

Assim, com base nos resultados do diagnóstico e nessas hipóteses a autora desenvolveu a sequência didática com o objetivo de conduzir os alunos a se familiarizarem com a estratégia de compensação de partes para transformar as figuras dadas em figuras de fácil análise como quadrados, retângulos ou triângulos retângulos. A autora constatou que o uso de atividades baseadas em processos de comparação, sobreposição, decomposição ou composição de figuras planas contribuem para o desenvolvimento dos alunos quanto à compreensão de área.

Facco (2003) desenvolveu a sequência e a discutiu com dois professores para que aplicassem em duas salas de quinta série. Observou que nas questões que exigiam o cálculo da medida de áreas de triângulos, representados em malhas quadradas, o índice de acertos foi menor do que nos que exigiam o cálculo da medida de áreas de figuras retangulares. Além disso, identificou os seguintes erros: multiplicação da medida de todos os lados do triângulo; multiplicação da medida de dois lados do triângulo, quando este apresentava medida de lados iguais; multiplicação da medida de dois lados do paralelogramo por eles construído.

Durante a aplicação da sequência a autora observou que os alunos desenvolveram um bom trabalho em grupo discutindo os problemas e compartilhando ideias para sua solução, embora tenham tido dificuldades em registrar suas conclusões, o que gerou respostas incompletas ou ausentes. Percebeu ainda que a presença do professor foi muito solicitada nos dois grupos, principalmente, por aqueles que não tinham autonomia para buscar a solução da atividade e, ainda, que nos momentos em que o professor não institucionalizou os conteúdos abordados, os alunos apresentaram dificuldades nas atividades posteriores.

O trabalho de Teles (2007) que apresenta uma **reflexão teórica** a respeito de área teve como objetivo geral de seu trabalho investigar imbricações entre os campos conceituais das grandezas, da geometria, numérico, algébrico e funcional na formulação e no tratamento de problemas que envolvem fórmulas para o cálculo da medida de área de retângulo, de quadrado, de paralelogramo e de triângulo em livros didáticos e em testes aplicados a 259 alunos de 2ª série do Ensino Médio, de cinco escolas do Recife e Região Metropolitana .

Para atingir tais objetivos a autora analisa duas coleções de livros didáticos de Matemática de 5ª a 8ª série (hoje 6º ao 9º ano) para observar como se dá a construção do significado das fórmulas de áreas. Observou que houve avanço na abordagem do conceito de área enquanto grandeza, bem como a dissociação entre área e perímetro. Por outro lado, utilizam, quase que absolutamente, números naturais para representar as medidas com exceção de um volume de uma das coleções que apresentava uma atividade cuja solução se dava por aproximação de números racionais. Tal constatação conduziu a autora a fazer uma reflexão a respeito da importância dos domínios numéricos explorados e como esta escolha pode intervir nas situações.

A pesquisadora realizou também a análise de outras seis coleções de livros didáticos de Matemática (4 coleções para o ensino fundamental e 2 para o ensino médio) com o intuito de mapear situações, invariantes operatórios e representações simbólicas subjacentes às situações utilizadas em livros didáticos e em provas de vestibulares, que envolvam fórmulas para o cálculo da medida de área do retângulo, do quadrado, do paralelogramo e do triângulo. Esta análise evidenciou que o trabalho com fórmulas para o cálculo de medidas de áreas é tido ora como objeto de estudo, ora como recurso para outras temáticas, entre elas: regularidades (decomposição de números quadrados); expressões algébricas equivalentes; decomposição de figuras; expressões algébricas; números irracionais; produtos notáveis; problemas numéricos – potenciação e raiz quadrada; sequências, progressões aritméticas e geométricas; funções: composta, inversa e quadrática. Nos livros didáticos analisados as fórmulas para o cálculo da medida de área dos triângulos foram obtidas por decomposição e recomposição a partir de um retângulo.

Os testes aplicados, evidenciaram a mobilização equivocada, por exemplo, da fórmula para o cálculo da medida da área de trapézios ou da fórmula para o cálculo da medida da área de paralelogramos para calcular a medida da área de um triângulo cuja altura

estava explícita na figura. Destacou ainda erros relacionados à decomposição de triângulos, comumente ligados a interpretação da altura como um segmento de reta que divide a figura em duas. Identificou também diversos invariantes operatórios falsos implícitos na mobilização de fórmulas errôneas para o cálculo da medida de área de triângulos, dentre eles: a multiplicação das medidas dos três lados do triângulo pela medida da altura; a metade do produto entre os três lados do triângulo e o produto entre dois lados do triângulo. Tais resultados evidenciaram para a pesquisadora “a construção não significativa do conceito de fórmula pelos alunos e reforçaram o aspecto mecânico relacionado à utilização das fórmulas de área na matemática escolar.” (TELES, 2007, p. 268).

Quanto ao campo conceitual numérico, a pesquisadora destacou o fato de questões de natureza algébrica ou geométrica serem resolvidas com procedimentos numéricos que colocam “em jogo que alguns alunos parecem evitar procedimentos gerais, baseados em propriedades geométricas e optam por um procedimento particular e sua consequente generalização.” (TELES, 2007, p.269). O conjunto numérico utilizado restringiu-se ao domínio natural, confirmando dificuldades relacionadas à passagem dos naturais para os racionais. Em relação ao campo conceitual algébrico identificou dificuldades relacionadas à escrita simbólica que implicavam na utilização de procedimentos numéricos além de figuras, mesmo quando não solicitadas, no sentido de facilitar a resolução da atividade. Identificou ainda erros de manipulação algébrica em questões que exigiam o uso: da propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração; de sistemas de equações e de multiplicação de um número inteiro por uma fração com denominador literal que implicavam na inexistência de respostas ou na escolha de procedimentos numéricos em suas resoluções. No campo conceitual da geometria foram identificadas dificuldades relativas à classificação das figuras, como por exemplo confundir paralelogramo e trapézio. Quanto ao campo conceitual das grandezas verificou que os alunos mobilizam invariantes operatórios a respeito de área e perímetro.

Em suas conclusões a autora afirma que pela análise dos dados ocorreu alto índice na ausência de respostas, principalmente, nas questões que relacionam os diversos campos conceituais, o mesmo foi verificado para as questões que tratavam de otimização cujos erros são: confusão entre área e perímetro no campo das grandezas, dificuldade na representação por figuras de um modelo real no campo geométrico, erro na construção

de um modelo matemático e na resolução de expressões algébricas no campo algébrico e, ainda, não interpretação da letra como variável no campo funcional.

### **Considerações finais**

O panorama realizado neste artigo nos permitiu verificar que, embora o estudo das grandezas geométricas seja relevante na formação de um indivíduo, tanto no âmbito escolar, como no âmbito social, ainda é realizado de forma inadequada no ensino básico. As pesquisas analisadas mostram que tanto os livros didáticos, quanto os professores não conduzem os alunos a construir conhecimentos que lhes permitam transitar por todos os campos conceituais envolvidos na conceituação de área: o das grandezas, o numérico, o geométrico e o algébrico. Pelo contrário, a ênfase é dada apenas ao uso de fórmulas, em algumas situações construídas pelos alunos, em outras apenas transmitidas.

A ausência de práticas que considerem esses campos, mais especificamente o trabalho de área enquanto grandeza apresentado por Douady e Perrin-Glorian (1989) e Bellemain (2002) conduzem os alunos a apresentarem uma série de dificuldades quando enfrentam situações que tratam de área. Os mais evidentes, nas pesquisas apresentadas, são: confusão entre área e perímetro, uso equivocado de fórmulas, além de outros relacionados a conhecimentos algébricos ou geométricos.

Por outro lado, vimos que a fórmula mais utilizada para o cálculo da medida de área de triângulos é a que considera o produto da medida de um lado por sua respectiva altura. A fórmula de Heron, por exemplo, foi citada apenas em um dos livros didáticos analisados.

Nos estudos que mostram análise de livros didáticos pudemos notar que, embora haja recomendações para que o tema grandezas seja tratado em todo o ensino fundamental, os livros tratam (quando o fazem) no final do volume, embora, o relacionam com outros conteúdos como expressões algébricas, potenciação, radiciação, funções, entre outros.

Nosso levantamento nos permite inferir que há necessidade de pesquisas que explorem outros aspectos como a relação entre geometria e álgebra para a construção de diversas fórmulas para o cálculo de áreas, especificamente, a de triângulos; como um novo olhar para o currículo de forma a permitir que resultados já encontrados possam ser incorporados; como diferentes estratégias de ensino que possibilitem uma aprendizagem efetiva do aluno e uma formação adequada de professores, tanto inicial, quanto

continuada.

## Referências

BARROS, A. L. de S. **Uma análise das relações entre área e perímetro em livros didáticos de 3º e 4º ciclos do ensino fundamental**. 2006. 213 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2006.

BELLEMAIN, P. M. B.; LIMA, P. F. **Um estudo da noção de grandeza e implicações no ensino fundamental**. Natal: SBHMat, 2002.

BRASIL, Ministério da Educação. **Brasil no PISA 2015: análises e reflexões sobre o desempenho dos estudantes brasileiros**. São Paulo: Fundação Santillana, 2016.

Disponível em: <

[http://download.inep.gov.br/acoes\\_internacionais/pisa/resultados/2015/pisa2015\\_completo\\_final\\_baixa.pdf](http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2015/pisa2015_completo_final_baixa.pdf)>. Acesso em: 05 de novembro de 2018.

\_\_\_\_\_. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em:

<[http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC\\_19mar2018\\_versaofinal.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC_19mar2018_versaofinal.pdf)>. Acesso em: 18 abril 2018.

CHEVALLARD, Y. Le passage de l'arithmétique a l'algebrique dans l'enseignement des mathématiques au college – Troisième partie. Voies d'attaque et problèmes didactiques. **Petit x**, n. 23, p. 5-38, 1989-1990.

CHIUMMO, A. **O conceito de áreas de figuras planas: Capacitação para professores do ensino fundamental**. 1998. 142 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC-SP, São Paulo, 1998.

FACCO, S. R. **Conceito de área: uma proposta de ensino-aprendizagem**. 2003. 150 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC-SP, São Paulo, 2003.

LESSA, L. de F. C. F. **Construção de um modelo epistemológico de referência considerando as análises das relações institucionais acerca do objeto matemático área**. 2017. 189 f. Dissertação (Mestrado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) – Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2017.

MACEDO, N. D. de. **Iniciação à pesquisa bibliográfica: guia do estudante para a fundamentação do trabalho de pesquisa**. 2. ed. revista. São Paulo: Edições Loyola, 1994.

MAIA, C. K. **A organização praxeológica do objeto triângulo nos livros didáticos da 7ª série do ensino fundamental**. 2008. 186 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.

SANTANA, W. M. G. de. **O uso de recursos didáticos no ensino do conceito de área: uma análise de livros didáticos para as séries finais do ensino fundamental**. 2006.



190 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2006.

SILVA J. V. G. da. **Análise da abordagem de comprimento, perímetro e área em livros didáticos de matemática do 6º ano do ensino fundamental sob a ótica da teoria antropológica do didático.** 2011. 194 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011.

TELES, R. A. de M. **Imbricações entre campos conceituais na matemática escolar: um estudo sobre as fórmulas de área de figuras geométricas planas.** 2007. 297 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007.