Resolução gráfica de sistemas de equações lineares de primeiro grau: explorando o estilo de pensamento matemático visual com um sujeito cego

ELEN GRACIELE MARTINS[1]

BARBARA LUTAIF BIANCHINI[2]

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar as estratégias utilizadas para ensinar a um sujeito cego a resolução gráfica de Sistemas de Equações Lineares de Primeiro Grau. Utilizamos as ideias teóricas propostas por Ferri sobre estilos de pensamento matemático. Segundo ela, podem ser classificados como visual, analítico e integrado. A metodologia adotada para coleta e análise dos dados foi o Design Experiments. Identificamos que nosso sujeito possui facilidade para lidar com a representação gráfica de Sistemas Lineares, o que nos pareceu confirmar a importância de que os temas sejam apresentados de forma acessível, com materiais e linguagem adaptados à condição de aprendizagem de nossos alunos. A experiência de ensiná-lo confirmou que a cegueira não é um fator determinante que os impeçam de aprender.
Palavras-chave*: Sistemas de Equações Lineares de Primeiro Grau; Sujeito cego; Estilos de pensamento matemático.*

Abstract

The objective of this work is to present a strategy to teach a blind person to graphical resolution of First Degree Linear Equations Systems. We have used the theoretical ideas proposed by Ferri on styles of mathematical thought. According to it, they can be classified as visual, analytical and integrated. The methodology adopted was the data collection and analysis for Design Experiments. We have identified, after an explanation of the contente, that our blind student has an easy way to deal with a graphical representation of Linear Systems, which seems to confirm the importance of their knowledge in an accessible way, with materials and language adapted to our students learning condition. The experience of teaching him / her has shown that blindness is not a determining factor to prevent them from learning.
Keywords: *First Degree Linear Equations Systems; Blind person; Mathematical thinking styles.*

Introdução

Um dos grandes desafios enfrentados pelos professores de escolas regulares ao receberem alunos cegos é ofertar condições de acesso aos conteúdos desenvolvidos. Pesquisas na área da Educação Matemática destacaram que muito além da necessidade de materiais adaptados, é notória a falta de formação dos professores para lidarem com as demandas da inclusão (MARTINS, 2010; MANRIQUE, 2015). A utilização de estratégias de ensino diferenciadas pode influenciar diretamente na qualidade de ensino desses educandos e há necessidade de empenho dos professores para que o acesso aos

[1] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Doutoranda do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática – elengraciele@globomail.com.

[2] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação

conteúdos aconteça (MIRANDA, 2016). Os autores citados também destacaram a escassez de pesquisas que envolvam o ensino de Matemática para alunos com deficiência, assim, neste artigo, descrevemos as etapas desenvolvidas para ensinar um sujeito cego a resolução gráfica de Sistemas de Equações Lineares de Primeiro Grau. Este relato pode ser uma contribuição a outros professores de Matemática que receberão alunos cegos em suas classes, pois oferece indícios de como desenvolver esse conteúdo com alunos que tenham a mesma condição física de nosso sujeito.

Utilizamos com fundamentação teórica os estudos propostos por Ferri (2012) sobre estilos de pensamento matemático, os quais, segundo ela, podem ser classificados em analítico, visual e integrado. Como metodologia para coleta e análise dos dados, adotamos o *Design Experiments*. Essa metodologia foi escolhida porque permite ao pesquisador traçar um perfil específico de aprendizagem dos sujeitos envolvidos ao analisar todo o caminho percorrido durante o experimento (COBB *et al.*, 2003).

Identificamos, por meio de uma Atividade envolvendo Sistemas de Equações Lineares que nosso sujeito não conhecia a resolução gráfica desse conteúdo, o que o impediu de utilizar dois estilos de pensamento matemático descritos pela autora. Assim, decidimos ensiná-lo como resolver graficamente o conteúdo em questão, dando-lhe subsídios para escolher qual estilo de pensamento matemático utilizar em atividades envolvendo este tema.

1 Estilos de pensamento matemático

As definições aqui apresentadas para estilos de pensamento matemático são dadas por Ferri (2012). A autora descreve os estilos de pensamento matemático como as preferências do sujeito em utilizar suas habilidades matemáticas. Ela destaca a existência de quatro características dos estilos de pensamento matemático:

1) não podem ser considerados como habilidades matemáticas do indivíduo, mas suas preferências em como utilizá-las em cada contexto apresentado;
2) estão relacionados à personalidade de cada indivíduo e geralmente estão ligados às experiências positivas por ele vivenciadas;
3) não podem ser considerados como estratégias de resolução de problemas matemáticos;

Matemática – barbara@pucsp.br.

4) podem ser influenciados socialmente.

Os estilos de pensamento matemático podem ser classificados, segundo Ferri (2012), como visual, analítico e integrado.

1) O estilo visual é caracterizado pela utilização de representações de imagens como desenhos, esboços, gráficos etc., para resolver situações matemáticas;
2) O estilo analítico é caracterizado pela utilização de algoritmos formais e a resolução dos exercícios segue uma sequência lógica, ou seja, são resolvidos passo a passo;
3) O estilo integrado é a combinação dos estilos visual e analítico.

Utilizando as ideias teóricas apresentadas por Ferri (2012), realizamos um estudo sobre os estilos de pensamento matemático mobilizados por um sujeito cego ao resolver exercícios de Sistemas de Equações Lineares de Primeiro grau.

2 Caracterização do sujeito da pesquisa

Nosso sujeito de pesquisa é um adolescente cego[3] que cursa o 9º ano do ensino fundamental em um colégio particular de pequeno porte da grande São Paulo. É gemelar, sendo que ele e sua irmã nasceram prematuros com apenas 25 semanas de gestação. Sua fragilidade o fez ficar hospitalizado por cerca de 4 meses. A família só percebeu a deficiência visual após a alta hospitalar, quando o bebê já estava em casa.

3 As etapas desenvolvidas no estudo

Nosso objetivo é apresentar as estratégias utilizadas para ensinar a um sujeito cego, do 9º ano, a resolução gráfica de Sistemas de Equações Lineares de Primeiro Grau. Cabe ressaltar que este estudo faz parte de uma tese de doutorado em andamento, desenvolvida pela primeira autora e orientada pela segunda, que investiga a aprendizagem de matemática por pessoas cegas, especialmente quais estilos de pensamento matemático são mobilizados por um sujeito cego ao resolver questões envolvendo Sistemas de Equações Lineares de Primeiro Grau.

Visando alcançar nosso objetivo de pesquisa, propusemos a um sujeito cego a Atividade

[3] Destacamos que essa pesquisa possui autorização do Comitê de Ética em Pesquisa conforme orienta a Resolução CNS/MS nº466/12 e que o responsável por nosso sujeito assinou o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido autorizando sua participação voluntária na pesquisa.

1 – Sondagem (Figura 1) que continha 4 exercícios envolvendo o tema estudado. A Atividade foi aplicada durante um encontro de 1 hora, fora do contexto escolar. Foi impressa à tinta e os gráficos foram representados numa malha quadriculada (em relevo) que faz parte do *kit* do aluno fornecido pelo Ministério da Educação e Cultura – MEC aos deficientes visuais. Oferecemos ao nosso sujeito a possibilidade de utilizar o *kit* em todas as questões, caso ele optasse por resolvê-las graficamente (Figura 2). À primeira pesquisadora coube a função de ledora das questões e escriba das respostas dadas pelo sujeito, além de registrar observações pertinentes ao estudo realizado em sua tese de doutorado. O encontro foi gravado em áudio, sendo transcrito após a realização da atividade.

Nosso sujeito resolveu os três primeiros exercícios utilizando o estilo de pensamento matemático analítico, não recorrendo à resolução gráfica em nenhum momento, porém não conseguiu resolver o exercício 4. Ressaltamos que esse exercício será expresso à tinta neste artigo, mas que foi ofertado ao nosso sujeito, durante a realização da Atividade, em malha quadriculada (em relevo). Ao entrevistá-lo, após a realização da Atividade 1, obtivemos a informação de que ele não havia tido contato com a representação gráfica de Sistemas de Equações Lineares de Primeiro Grau, o que nos fez pensar que o estilo analítico pode não ser sua preferência e sim a única forma de resolução que conhece. Assim, decidimos explicar como resolver graficamente o conteúdo em questão, dando-lhe condição para solucionar o exercício 4 e também outras questões envolvendo esse conteúdo, utilizando-se dessa representação.

Nossa estratégia envolveu dois encontros fora do ambiente escolar. Um de aproximadamente 1h30min de duração, que foi destinado à explicação do conteúdo e o outro de 1h de duração para a reaplicação da questão 4 da Atividade 1 - Sondagem. Os encontros foram gravados em áudio e transcritos.

Nosso primeiro passo foi apresentar a malha quadriculada[4] ao nosso sujeito. Explicamos como se dá a representação de pontos no plano Cartesiano e a divisão em quatro quadrantes. Como localizar o eixo das abscissas (termo independente) e das ordenadas (termo dependente), além de ter que notar que as abscissas que estão nos quadrantes II e

[4] Cabe a observação que o sistema cartesiano plano não contém as setas à esquerda de zero no eixo das abscissas e abaixo de zero no eixo das ordenadas. Também destacamos que *kit* de materiais do aluno pertence ao nosso sujeito e estava disponível para uso do professor de Matemática de sua escola desde o 6º ano do ensino fundamental.

III são negativas, enquanto as que estão nos quadrantes I e IV são positivas. Os valores das ordenadas nos quadrantes I e II são positivos, e nos restantes, III e IV, são negativos. (Figura 2).

Figura 1 – Atividade 1 - Sondagem

Atividade 1 - Sondagem

1. A soma entre a idade de Carlos e o dobro da idade de Lúcia é 125 anos. Qual é a idade de Lúcia, sabendo que ela tem o dobro da idade de Carlos?

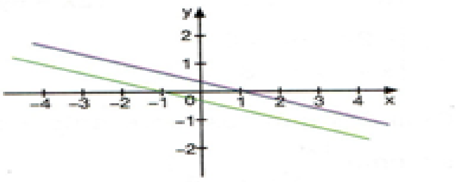
2. Um certo veículo utilitário custa R$ 15.000,00 a mais que o modelo *hatch* da mesma marca. Se os dois juntos custam R$ 69.000,00, quanto custa o modelo utilitário?

3. Em uma caixa, o número de bolas vermelhas é o triplo do número de bolas pretas. Se tirarmos 2 bolas pretas e 26 vermelhas, o número de bolas de cada cor ficará igual. Quantas bolas vermelhas há na caixa?

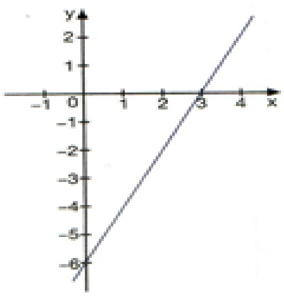
4. Associe cada sistema de equações à sua representação gráfica.

a) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ -4x + 2y = -12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x + 6y = -2 \end{cases}$

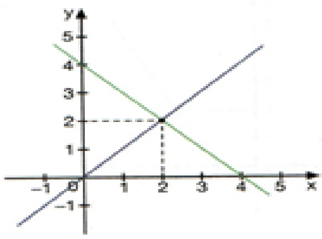
I)



II)

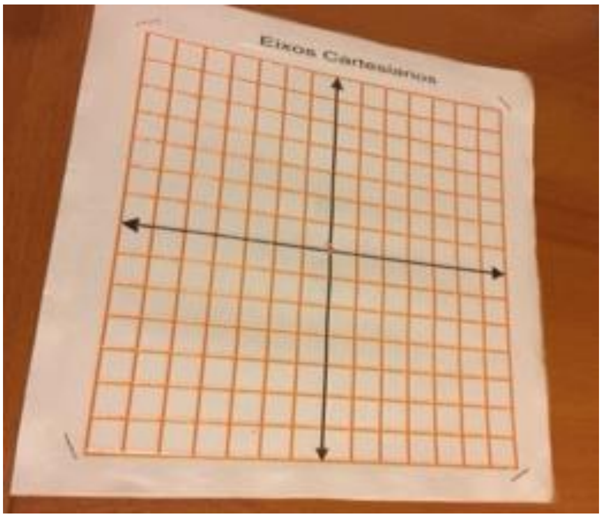


III)



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 2 – Malha quadriculada em relevo



Fonte: *Kit* do aluno enviado pelo MEC

Percebermos que nosso sujeito não apresentou dificuldades para identificar os eixos do plano cartesiano (abscissas e ordenadas), e que poderíamos iniciar o trabalho de determinar pontos no plano cartesiano. Para tal, apresentamos os materiais que foram utilizados na representação dos pontos (massinha de modelar) e das retas (macarrão do tipo espaguete). Iniciamos com a identificação dos seguintes pontos no plano cartesiano: (1, 3); (-2, 6); (0, -6); (3, 0); (4, 2) (Figura 3). Observamos que nosso sujeito possui facilidade para marcar e identificar pontos no plano cartesiano, ele conseguiu se guiar pelo tato para identificar onde cada ponto deveria ser representado. No momento em que ele encontrava onde marcar o ponto, solicitava à pesquisadora que lhe desse uma bolinha (usamos massinha de modelar para representar os pontos) e ele mesmo a colocava no lugar que achava correto. Percebemos que ele usava, algumas vezes, um ponto já marcado como parâmetro para determinar outro. Por exemplo: para marcar o (2, 6) ele usou como parâmetro o ponto (1, 3), iniciando a contagem a partir dele e não do ponto (0, 0).

A segunda etapa de nossa atividade envolveu determinar retas no plano cartesiano usando pontos dos exemplos dados anteriormente: (1, 3); (-2, 6) e (0, -6); (3, 0) (Figura 4). Observamos que determinar as retas foi algo fácil para nosso sujeito, pois ele já havia marcado os pontos com as bolinhas de massinha de modelar e no momento de colocar o espaguete para representar as retas, solicitava ajuda da primeira pesquisadora para posicioná-lo no plano cartesiano. Não houve interferência desta nas escolhas do sujeito, ela apenas posicionava o espaguete nos pontos indicados por ele.

Figura 3 – Marcando pontos na malha quadriculada

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 4 – Determinando retas na malha quadriculada

Fonte: Dados da pesquisa

Após percebermos que ele já conseguia identificar e marcar pontos e determinar retas, iniciamos a explicação de como é possível resolver Sistemas de Equações Lineares do Primeiro Grau utilizando a representação gráfica.

Iniciamos a explicação, oralmente, indicando quais são as possibilidades de representação do sistema linear no plano cartesiano: 1) quando as retas são concorrentes, o sistema tem uma única solução e esta corresponde às coordenadas do ponto em que as retas se cruzam; 2) quando as retas são paralelas e distintas, o sistema linear não tem solução; 3) quando as retas são coincidentes, o sistema linear tem infinitas soluções que correspondem às coordenadas de cada ponto dessas retas.

O próximo passo foi a explicação de como realizar a análise dos coeficientes e dos termos independentes das equações a partir dos exemplos dados a seguir:

$$\text{Sendo} \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'x = c' \end{cases}$$

Comparando as razões obtidas: $\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'}, \frac{c}{c'}$, a’, b’ e c’ $\neq$ 0, temos:

1) se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, o sistema é possível indeterminado (SPI) e as retas que o representam serão coincidentes.

Exemplo: $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$

Temos: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, a razão é $\frac{1}{2}$, logo o sistema é SPI.

2) se $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$, a’, b’ e c’ $\neq$ 0, o sistema é possível determinado (SPD) e as retas que o representam são concorrentes.

Exemplo: $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$

Temos: $\frac{1}{1} \neq \frac{-1}{2} \neq \frac{12}{3}$, logo o sistema é SPD.

3) se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$, a’, b’ e c’ $\neq$ 0, o sistema é impossível (SI) e as retas que o representam serão paralelas.

Exemplo: $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$

Temos: $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} \neq \frac{3}{2}$, logo o sistema é SI.

4) se $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, a', b' e c' ≠ 0, logo o sistema é possível determinado (SPD) e as retas que o representam serão concorrentes.

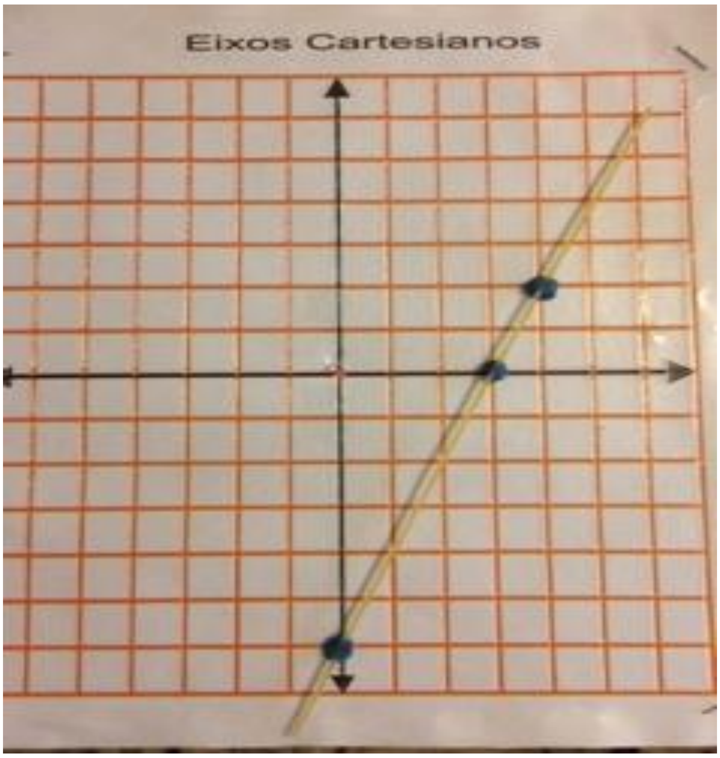
Exemplo: $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

Temos: $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1} = \frac{4}{2}$, logo o sistema é SPD. Explicamos ao nosso sujeito que esse exemplo é similar ao exemplo 2.

Realizamos a explicação das condições para que o sistema seja considerado SPI, SPD e SI e como utilizar as razões entre os coeficientes das equações para resolvê-lo, encerrando, assim, o primeiro encontro.

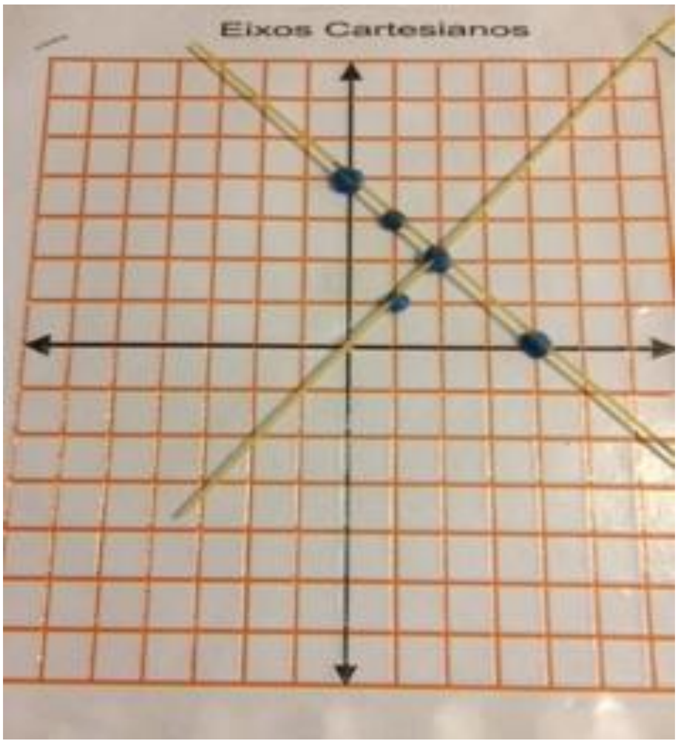
No segundo encontro solicitamos ao nosso sujeito que resolvesse a questão 4 da Atividade 1 - Sondagem. Os gráficos foram apresentados na malha quadriculada (Figuras 5, 6 e 7) e coube à primeira pesquisadora ler a questão e anotar as etapas de resolução construídas por nosso sujeito.

Figura 5 – Item II da Questão 4 representado em relevo



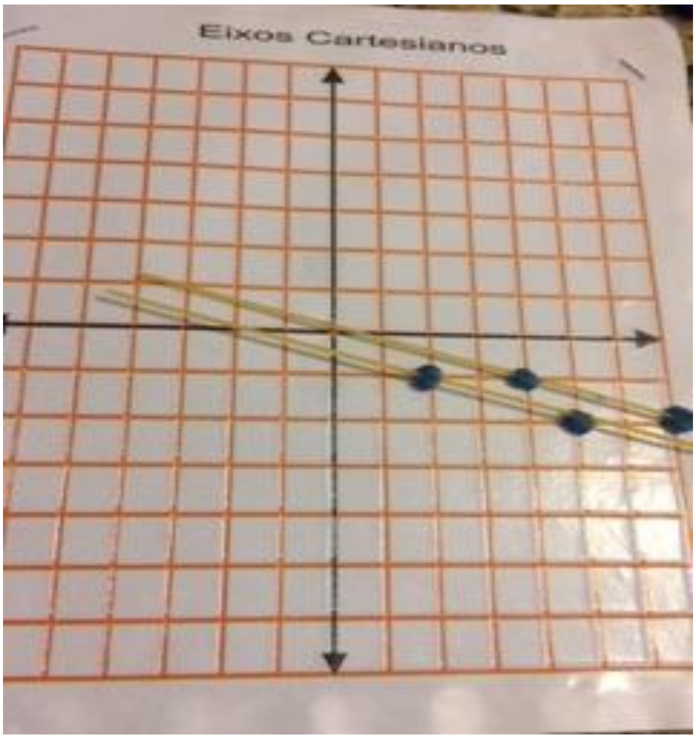
Fonte: Elaborado pela primeira autora

Figura 6 - Item III da Questão 4 representado em relevo



Fonte: Elaborado pela primeira autora

Figura 7 – Item I da Questão 4 representado em relevo



Fonte: Elaborado pela primeira autora

Como dito anteriormente, a primeira pesquisadora assumiu a função de ledora e coube a ela ler o enunciado da questão muitas vezes. Como estratégia, também pediu ao sujeito que sentisse, tocando com as mãos, como eram os gráficos que representavam os Sistemas de Equações Lineares de Primeiro Grau. Imediatamente, após "sentir" os gráficos, ele disse que sabia que o gráfico que continha duas retas paralelas representava um sistema impossível. Nosso sujeito lembrou que havíamos explicado, no encontro anterior, como determinar, pelo gráfico, se os Sistemas Lineares eram SPI, SPD e SI. Perguntamos qual, dos três Sistemas Lineares representados nos itens *a, b* e *c* da questão 4 estava associado ao gráfico apresentado. Foi necessário lermos muitas vezes as equações que formavam os Sistemas Lineares e, após "memorizar" cada um, disse que já conseguia associar os sistemas às representações gráficas. Perguntamos como ele pensou para chegar à resposta (anotamos o passo a passo descrito por ele).

> *Depois que eu "vi" (sentiu) os gráficos, eu já sei qual é impossível, qual é possível determinado e qual é possível indeterminado.* Pedimos, então, para que ele dissesse qual gráfico correspondia a cada sistema.
> *O impossível tem duas retas que não se encontram.... Essa foi fácil! Eu fiquei com isso na mente* (risadas)*; o que cruza* (retas

> concorrentes) *é determinado e sobrou o indeterminado para o que tem um macarrão só... que você* (primeira pesquisadora) *tinha falado que era para imaginar que tinha dois* (retas coincidentes).

Solicitamos que associasse o gráfico à representação algébrica do Sistema. Houve a necessidade de relembrá-lo do procedimento algébrico para determinar as razões entre os coeficientes. Após retomarmos a explicação dos exemplos dados no encontro anterior, ele conseguiu expressar como as razões deveriam ser escritas e associar corretamente os gráficos aos Sistemas Lineares.

Considerações finais

Neste artigo apresentamos as etapas desenvolvidas para ensinar um sujeito cego a resolver graficamente Sistemas de Equações Lineares de Primeiro Grau. Nossa intenção era proporcionar-lhe condições para utilizar tanto o estilo de pensamento matemático visual, quanto o estilo de pensamento integrado nas resoluções de questões que envolvam este conteúdo. Como discutido anteriormente, identificamos, por meio da aplicação de uma Atividade 1 - Sondagem que envolvia o tema em questão, que nosso sujeito não havia tido contato com essa forma de apresentação do conteúdo.

Ressaltamos que para alcançar nosso objetivo foi necessário ofertar a ele condições de acesso aos conteúdos explorados, o que, neste caso, foi a utilização de materiais concretos (malha quadriculada em relevo, massinha de modelar e macarrão espaguete) e adequação à linguagem utilizada para explicar o tema.

Ao retornarmos à resolução da questão 4 da Atividade 1 - Sondagem, houve a necessidade reexplicar como trabalhar com as razões dos coeficientes das Equações dos Sistemas Lineares. Assim, refletimos que talvez fossem necessários mais encontros para que nosso sujeito tivesse mais autonomia para resolver esse tipo de exercício.

Foi possível observar, na resolução da questão 4 a utilização do estilo de pensamento integrado pois, além de recorrer ao gráfico de cada item, nosso sujeito também utilizou a resolução algébrica para determinar as razões dos coeficientes das equações.

Assim, foi evidenciado que, ao apresentarmos o conteúdo matemático de forma acessível, utilizando materiais e linguagem adequados à condição de nosso sujeito, não houve barreiras que o impedisse de realizar o exercício 4 da Atividade, e que o estilo de pensamento matemático visual pode ser utilizado por um sujeito cego.

Agradecimentos

Agradecemos à Capes pela bolsa de estudos, ao nosso sujeito de pesquisa, que aceitou participar de forma voluntária deste estudo e a PUC/SP por oferecer esse espaço de divulgação de pesquisas acadêmicas, possibilitando discussões necessárias ao desenvolvimento da educação de nosso país.

Referências

COBB, Paul; CONFREY, Jere; diSESSA, Andrea; SCHAUBLE, Leona. Design Experiments in Education Research. **Educational Researcher**, v.32, n.1, 2003.

FERRI, R. B. Mathematical Thinking Styles and Their Influence on Teaching and Learning Mathematics. In: INTERNACIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 12, 2012, Seoul. **Anais**.... Seoul: Coex, 2012. p. 1 -12. Disponível em: <http://www.icme12.org/upload/submission/1905_F.pdf>. Acesso em 02 de set. de 2017.

MANRIQUE, A. L. Educação Matemática Inclusiva: Reflexões sobre resultados de pesquisas desenvolvidas em um projeto do OBEDUC/ 2010. **Anais do I SIPRAEM**. Santo André, 2015.

MARTINS, E.G. **O papel da percepção sonora na atribuição de significados matemáticos a Números Racionais por pessoas cegas e pessoas com baixa visão**. Dissertação de mestrado. São Paulo: UNIBAN, 2010.

MIRANDA, E. T. J. **O aluno cego no contexto da inclusão escolar: desafios no processo de ensino e de aprendizagem de Matemática**. Dissertação de mestrado Universidade Estadual Paulista – Faculdade de Ciências, 2016.