

Identificación del conocimiento didáctico-matemático, en la faceta epistémica y ecológica, del profesor de educación secundaria sobre los sistemas de ecuaciones lineales

CARLOS OMAR CARDENAS ESTRELLA¹

ROSA GAITA IPARRAGUIRRE²

Resumen

Prendemos identificar el conocimiento que debería tener un profesor de matemática, sobre los Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL). Para ello, adoptamos el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM), del cual consideramos las dimensiones matemática y didáctica, en las facetas epistémica y ecológica. A partir del análisis de contenido de diversos documentos, propusimos un significado de referencia sobre los SEL, obteniendo evidencias de cuáles podrían ser los conocimientos del profesor, en las dimensiones señaladas. Estos resultados pueden servir de base para extender el estudio del conocimiento del profesor sobre los SEL en las otras facetas no consideradas, o bien para organizar programas destinados a la formación de docentes en formación o en actividad.

Palabras-clave: *Conocimiento didáctico-matemático; Faceta ecológica; Significado de referencia.*

Abstract

In this article we propose to identify the knowledge that a mathematics teacher should have about the Systems of Linear Equations (SLE). In order to do that, we adopted the model of Didactic-Mathematical Knowledge (DMK), from which we considered the mathematical and didactic dimensions, in the epistemic and ecological facets. After analyzing the content of different documents, we suggested a reference meaning for the SLE. Based on these findings, a teacher's knowledge is proposed in the indicated dimensions. These results can be used as a baseline to continue studying teachers' knowledge about the SLE in other facets that have not been considered and to organize programs destined for pre-service and in service teachers.

Keywords: *Didactic-mathematical knowledge; Ecological facet; Reference meaning.*

Introducción

El rol del profesor de matemáticas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática es fundamental; sin embargo, como mencionan Pino-Fan y Godino (2015), uno de los problemas más interesantes en didáctica de la matemática, abordado en los últimos años, ha sido construir un modelo teórico que permita identificar los conocimientos que debería tener un profesor de matemáticas, teniendo en cuenta la especificidad de esa profesión. A partir de ello, se han desarrollado investigaciones que permiten validar el modelo de forma experimental, identificando conocimientos

¹Pontificia Universidad Católica del Perú. Maestría en Enseñanza de las Matemáticas – a19960132@pucp.edu.pe.

²Pontificia Universidad Católica del Perú. Maestría en Enseñanza de las Matemáticas – cgaita@pucp.edu.pe .

relacionados con un tema específico, por citar algunos ejemplos, Gonzato, Godino y Neto (2011) presentan una evaluación del conocimiento didáctico-matemático del profesor sobre la visualización de objetos tridimensionales, explorando la faceta epistémica, desde el marco del EOS; Rivas, Godino y Castro (2012) hacen un análisis epistémico, también desde el EOS, que permite desarrollar el conocimiento especializado del contenido del profesor con referencia a la proporcionalidad; Pino-Fan (2013) realiza una investigación que analiza la faceta epistémica del modelo del CDM del profesor sobre la derivada; Vasco (2015) realiza un estudio sobre el conocimiento especializado del profesor, acerca del álgebra lineal, basado en el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, acerca de las matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales; Sepúlveda (2016) hace un análisis del conocimiento del profesor universitario sobre el objeto Campo, en referencia a la faceta epistémica del modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático; así también, Escudero (2017) muestra su trabajo basado en reconocer el conocimiento del profesor en la faceta epistémica, sobre las funciones lineales y cuadráticas, con base en el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático.

En esa misma línea, este trabajo tiene por objetivo identificar los conocimientos del profesor de matemáticas de secundaria peruana, referente a los SEL, basado en el CDM, del cual se desarrollarán las facetas epistémica y ecológica de la faceta Didáctica, de dicho modelo.

1 Elementos teóricos y metodológicos

El método empleado en esta investigación es de corte cualitativo ya que este permite analizar fenómenos relacionados con el conocimiento y la ciencia, tal como señala Martínez (2006).

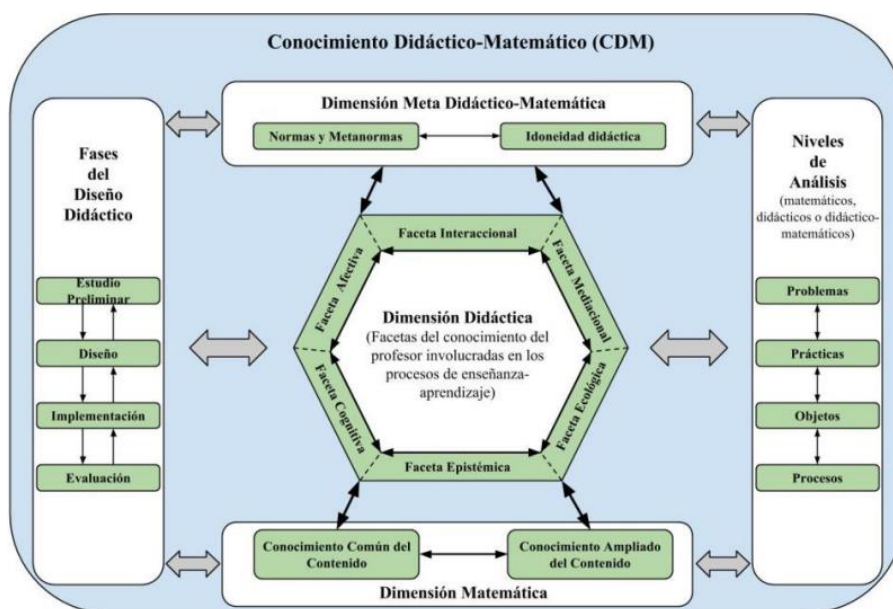
En particular, en el proceso de identificación del conocimiento didáctico-matemático del profesor de secundaria sobre SEL, se analizan el significado de referencia del objeto de estudio y los indicadores sobre dicho conocimiento por parte del docente. Así también, para reconocer los objetos primarios que emergen de las situaciones con SEL nos apoyamos en las herramientas que brinda el EOS tales como los Sistemas de prácticas operativas y discursivas, las que permitirán considerar aquellas situaciones que corresponden a los SEL, considerando como institución la educación secundaria

peruana para la cual se propondrá un significado de referencia sobre el objeto de estudio. Además, empleamos la Configuración de Objetos, que permitirá organizar las prácticas matemáticas en torno a los SEL a través de los objetos primarios (situaciones, definiciones, proposiciones, lenguaje, procedimientos y argumentaciones).

Para las etapas descritas se emplea el análisis de contenido; se analizan textos escolares de secundaria, textos matemáticos, investigaciones en didáctica de la matemática y documentos oficiales del Ministerio de Educación del Perú. En ese proceso se emplea un sistema de codificación y categorías, basadas en herramientas teóricas que brinda el modelo del CDM.

Cabe señalar que el modelo del CDM del profesor propuesto por el EOS considera tres dimensiones para describir el conocimiento de un profesor de matemáticas: Matemática, Didáctica y Meta didáctico-matemático (PINO-FAN y GODINO, 2015). En la Figura 1 se presenta un esquema del modelo actual, considerando las tres dimensiones, así como las fases de diseño didáctico y los niveles de análisis que se consideran en cada una de dichas dimensiones.

Figura 1- Dimensiones y componentes del modelo del CDM.



Fuente: Pino-Fan y Godino (2015, p.98)

Esta propuesta amplía el modelo inicial propuesto por Godino (2009), permite analizar de forma más específica las prácticas de matemáticas y didácticas, al considerar estas subcategorías que identifican el conocimiento del profesor, para lo cual reorganizan los componentes y características del modelo, lo que permite integrar y ampliar lo

desarrollado y avanzado en otros modelos.

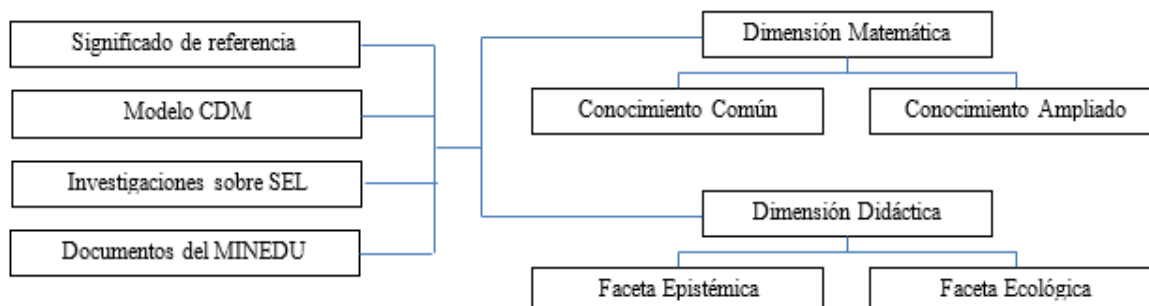
La Dimensión Matemática se refiere al conocimiento matemático del profesor y considera dos subcategorías: En la que se refiere al Conocimiento Común del Contenido, se consideran los conocimientos que requiere el profesor para solucionar problemas que están propuestos en el plan de estudio o en los textos de algún nivel educativo específico. En particular, para los SEL estos conocimientos consisten en resolver un problema sobre SEL, previa identificación de si el problema requiere de los SEL. El planteamiento del mismo significa que debe simbolizar el enunciado en forma matemática para su tratamiento en esta representación, resolver el SEL que ha planteado e interpretar la solución del sistema como solución de la situación inicial. En la subcategoría del Conocimiento Ampliado del Contenido se consideran los conocimientos del profesor sobre los conceptos matemáticos que se estudian posteriormente en el plan de estudio referido o en algún nivel de estudios. Brinda al profesor herramientas necesarias para mostrar desafíos matemáticos en aula, relaciona el objeto en estudio otros objetos, lo que motivaría a los alumnos en el estudio de conceptos matemáticas posteriores a la actual. El profesor debe ser capaz de reconocer estas situaciones y las condiciones propias de cada tema para lograr resolverlas, ya que en muchos casos para resolver el SEL será necesario verificar condiciones propias del contexto del problema.

Para caracterizar el conocimiento didáctico-matemático del profesor, además de los conocimientos matemáticos, como indican Pino-Fan y Godino (2015), se requiere considerar otros conocimientos que son propios de su labor docente cuando diseña, implementa y evalúa procesos de instrucción sobre un tema específico. Esos conocimientos se sitúan en la Dimensión Didáctica. Cabe resaltar que las facetas de esta dimensión son de índole didáctico-matemática, ya que las características cognitivas y afectivas de los alumnos, así como las interacciones o recursos, están fuertemente relacionadas con el objeto de estudio. La adaptación de los criterios de idoneidad didáctica permite al profesor reflexionar sobre su propio trabajo en clase. Para esta investigación se han considerado dos facetas: la epistémica, que se refiere a los conocimientos matemáticos referentes a la institución donde se desarrolla el estudio, así como a la distribución de los objetos primarios. En esta investigación se considera como institución la educación secundaria peruana y como objetos primarios se analizarán los problemas, los lenguajes, los procedimientos, las definiciones, las propiedades y los

argumentos. La segunda faceta considerada es la ecológica. Los resultados obtenidos en términos de conocimiento didáctico se presentan en el siguiente apartado.

Como parte de la metodología, en la Figura 2 se presentan organizados los aspectos considerados para identificar los conocimientos del profesor.

Figura 2- Relación de elementos para elaboración de indicadores del CDM



Fuente: propia

Primero, se consideraron las herramientas que brinda el modelo del CDM para la identificación de los objetos primarios, a partir de los cuales se organiza el significado de referencia institucional con respecto a los sistemas de ecuaciones lineales. También se analizaron cómo algunas investigaciones construyeron el significado de referencia de otros objetos matemáticos, siendo un aspecto muy relevante para esta investigación el análisis de contenido de diversos textos. Y para complementar el análisis y enfocarlo en la educación secundaria peruana, se consideró analizar documentación brindada por el Ministerio de Educación del Perú, como el Currículo Nacional (PERÚ, 2016) y otros que permitieron analizar la actual manera en que se muestra a los alumnos la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales y de otros temas desarrollados en el nivel escolar.

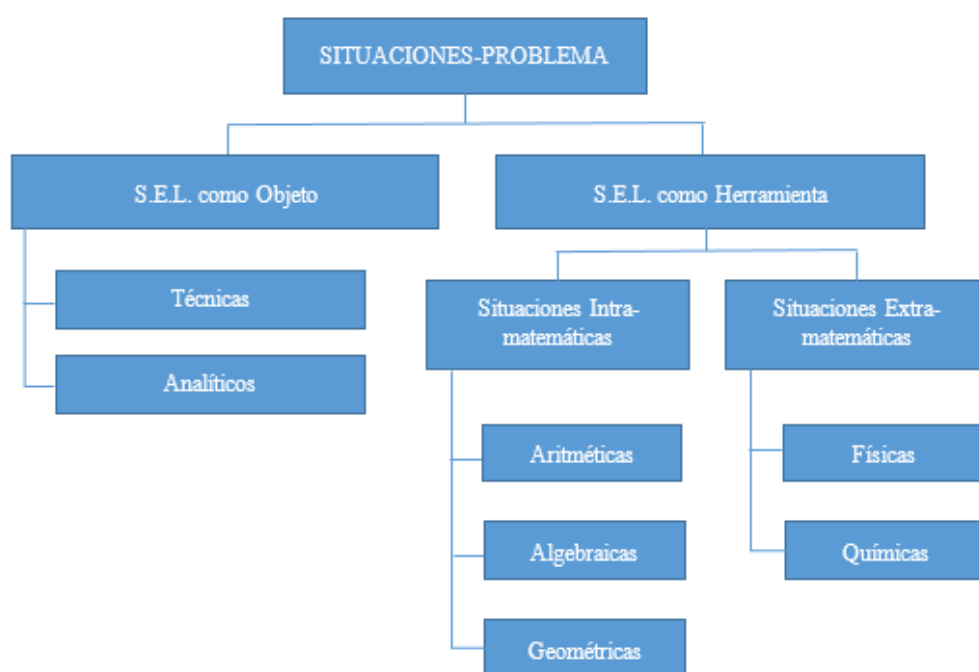
Con todos estos elementos se hará una propuesta de conocimientos matemáticos que debería tener un profesor de matemática sobre los SEL.

2 Resultados

Uno de los resultados relevantes, es la propuesta de un significado de referencia fue muy importante y se logró gracias al análisis de contenido de los textos escolares y no escolares, la metodología empleada y los aspectos teóricos brindados por el modelo del CDM. La identificación de los diversos objetos primarios que se relacionan en torno a los SEL (situaciones-problema, lenguajes, definiciones, procedimientos, propiedades y argumentaciones), surgen de las prácticas matemáticas.

Por ello, fue necesario clasificar las situaciones-problemas, haciendo una adaptación basada en la dialéctica Herramienta-Objeto que utiliza Douady (1984). Douady señala que esta dialéctica es un desarrollo periódico donde los objetos matemáticos actúan de dos maneras, alternándose convenientemente: como herramienta cuando se trata de solucionar una situación y como objeto cuando se trata de elaborar un conocimiento organizado. Entendiendo esto, los sistemas de ecuaciones lineales son utilizados como herramienta cuando se abordan y resuelven otros temas en la matemática y fuera de ella, así como objeto cuando se desarrolla el concepto matemático, considerado como cultural (DOUADY, 1984). En la Figura 3 se muestra la clasificación se considerará:

Figura 3- Clasificación de las situaciones-problema, respecto a los SEL



Fuente: propia

Cuando nos referimos a situaciones como Objeto se considerará una sub-clasificación orientada a aprender diversas técnicas y analizar tipos de sistemas de ecuaciones. Mientras cuando nos referimos situaciones como Herramienta la sub-clasificación se da de acuerdo dos contextos: Intra-matemáticos o Extra-matemáticos. Se debe entender como Intra-matemático a las situaciones que se relacionan con la matemática y que aparecen en el Currículo Nacional (PERÚ, 2016), no siendo específicamente el objetivo de aprendizaje, sino que se requiere de su uso para resolver tales situaciones. En este grupo de problemas, se considerarán situaciones en el ámbito aritmético, algebraico, geométrico y estadístico. Y cuanto a lo Extra-matemático, comprende las situaciones que aparecen en el currículo peruano, pero que pertenecen a otras áreas, como por es el

caso de Ciencia, Tecnología y Ambiente, específicamente en temas relacionados a la Física y Química, y a temas de carácter social o de situaciones cotidianas. Como se había indicado, para poder identificar qué conocimientos debería tener un profesor sobre los SEL, el significado de referencia tuvo un aspecto fundamental, ya que en él se reconocieron objetos primarios relacionados a los SEL. Se presenta una propuesta sobre cuáles deberían ser los conocimientos didáctico-matemáticos que un profesor debe poseer acerca de los SEL. Para ello, se complementa el significado de referencia institucional con la información proveniente del análisis de textos escolares y no escolares, así como del análisis de documentos emitidos por el Ministerio de Educación del Perú y de investigaciones relacionadas con el tema, en los cuales se establecen algunos indicadores de conocimiento del profesor sobre los SEL. Con todo ello se ha clasificado el conocimiento en dos dimensiones, subdivididas en 2 categorías de conocimiento.

En la Dimensión Matemática del modelo del CDM se consideran 2 subcategorías. Para ambas se han organizado de forma conveniente diversos indicadores relacionados a cada una de ellas. La primera subcategoría se refiere al Conocimiento Común Del Contenido, que considera el saber propiamente matemático que debe tener un profesor para resolver situaciones que requieran SEL; la propuesta se presenta en la tabla 1.

INDICADOR	DESCRIPCIÓN
Reconocer qué problema requiere el uso de sistemas de ecuaciones lineales.	El profesor debe identificar el tipo de situación-problema que aparece en la educación secundaria peruana, sea intra o extra-matemáticos.
Plantear un sistema de ecuaciones lineales.	El profesor debe plantear una situación como un SEL, identificar las incógnitas y parámetros o coeficientes. En muchos casos se deberá hacer un cambio de representación al algebraico para su tratamiento.
Resolver un sistema de ecuaciones lineales, usando algún método.	El profesor debe utilizar algún método que permita resolver el SEL. Puede ser cualquiera de los vistos en el significado de referencia construido.
Interpretar la solución del sistema de ecuaciones lineales como solución de la situación inicial.	El profesor debe concluir en una respuesta a la situación planteada. Existen situaciones en la cual la solución del SEL, no será necesariamente la solución de la situación. Por ello, debe tener la capacidad de interpretar dicha solución, regresar al enunciado y verificar que satisfaga como solución de la situación planteada.

Tabla 1. Indicadores del conocimiento común del contenido del profesor sobre SEL.

Fuente: elaboración propia.

De otro lado, para identificar el Conocimiento Ampliado Del Contenido, se consideró el

Currículo Nacional (PERÚ, 2016) a partir del cual se construyeron indicadores de dicho conocimiento, los que se presentan en la tabla 2.

INDICADOR	DESCRIPCIÓN
Identificar qué temas usan los SEL.	<p>El profesor debe relacionar los SEL con otros temas de la competencia <i>Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio</i>, como las fracciones algebraicas, ecuaciones lineales, función lineal, programación lineal o geometría analítica.</p> <p>Para las nociones matemáticas de índole intra-matemático se consideraron los siguientes contextos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Aritmético: Situaciones cotidianas, Conjuntos, Divisibilidad, Proporcionalidad, Regla de Interés, Sucesiones. • Algebraicos: Polinomios, Fracciones algebraicas, Binomio de Newton, Números Complejos, Funciones, Programación Lineal. • Geométrico: ángulos, triángulos, Cuadriláteros, Polígonos, Geometría Analítica. <p>Y para las nociones matemáticas de índole extra-matemáticos, se consideraron los siguientes contextos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Físico: Vectores, Cinemática, Estática, Dinámica. • Químico: Reacciones químicas, Teoría de átomos.
Identificar conocimientos de otros temas que usan SEL.	<p>El profesor debe conocer las definiciones y propiedades de otros temas intra o extra-matemáticos que necesitan de los SEL cuando resuelve situaciones en dichos temas. Estos conocimientos se mencionan cuando se identificaron las situaciones-problema en el significado de referencia, ya que existen conceptos, propiedades y otras condiciones que son necesarias que el profesor sea capaz de formular, resolver e indicar la solución de la situación inicial.</p> <p>Debe reconocer problemas, lenguajes, definiciones, procedimientos, propiedades y argumentaciones de cada caso. Por ejemplo, para programación lineal, reconocer el gráfico de las ecuaciones lineales y la región factible, que permita optimizar una función objetivo; para geometría analítica, reconocer ecuaciones de elipses, circunferencias, rectas o hipérbolas, en los cuales se plantean ecuaciones no lineales, pero estas conllevan, en la mayoría de casos, a reducirlas a un SEL, como parte de la solución.</p>

Tabla 2. Indicadores del conocimiento ampliado del contenido del profesor sobre SEL.

Fuente: elaboración propia.

Como ya se había mencionado, en la Dimensión Didáctica, se consideraron dos facetas. Para la Faceta epistémica y asociado a los SEL, los conocimientos del profesor deberían incluir la capacidad de identificar los objetos primarios tales como definiciones específicas relacionadas con el objeto que pueden tener conexión con otros objetos, como ecuación lineal, conjunto solución, unicidad de la solución, equivalencia, operaciones lineales, entre otros más que sean necesarios, procedimientos o métodos de solución, pero además debe reconocer la eficiencia de uno sobre otro, para poder elegir

el más conveniente; lenguajes empleados en situaciones que utilicen los SEL, esto implica reconocerlos para identificar las transformaciones que se deben hacer en cada uno de ellos y entre ellos; las propiedades en torno a los SEL, por ejemplo, si tiene solución o no, si tiene solución única o infinitas, entre otras.; argumentaciones, que permitan justificar la forma de usar y aplicar un método, de las propiedades existentes, a fin que sea convincente en su práctica docente. En la tabla 3 se presentan indicadores de dicho conocimiento relacionados con los objetos primarios (definiciones, procedimientos, lenguajes, propiedades y argumentaciones).

INDICADOR	DESCRIPCIÓN
Identificar lenguajes sobre SEL.	El profesor debe reconocer el lenguaje verbal, algebraico, gráfico, tabular, figural, matricial, así como expresiones con determinantes al aplicar el método de Cramer.
Identificar definiciones sobre a SEL.	Reconocer definiciones de temas previos a los SEL (ecuación lineal, intercepto, conjunto solución), así como definiciones relacionadas con SEL y otros temas que son posteriores a este objeto.
Identificar situaciones sobre SEL.	Reconocer situaciones intra-matemáticos (aritmética, álgebra y geometría) y extra-matemáticos (física y química).
Reconocer las variables didácticas.	Identificar elementos necesarios al resolver SEL, que al ser modificados, propicien situaciones que generen nuevos desafíos. Por ejemplo, los parámetros del sistema (coeficientes de las incógnitas o términos independientes); la cantidad de ecuaciones e incógnitas, para analizar el tipo de sistema mostrado.
Identificar procedimientos sobre SEL.	Aplicar procedimientos, como Sustitución, Igualación, Eliminación o Gauss-Jordan, y otros como ecuaciones diofánticas o la falsa suposición. Reconocer procedimientos más convenientes y explicar la secuencia de pasos en cada método.
Identificar propiedades sobre SEL.	Reconocer las relaciones de coeficientes del sistema, la posibilidad o no de resolver un SEL. Reconocer propiedades de otros temas que necesitan SEL.
Identificar argumentos o justificaciones sobre SEL.	Justificar métodos de Sustitución, Igualación, Eliminación, Gauss-Jordan, Falsa suposición o ecuaciones diofánticas. Justificar propiedades del objeto. Justificar el tipo de solución: única (compatible determinado), infinitas (compatible indeterminado) o aquellas que no tienen solución (incompatibles). Justificar elección de un método según las características de las variables didácticas, que se reconocen del significado de referencia.

Tabla 3. Indicadores del conocimiento del profesor sobre los SEL en la faceta epistémica.

Fuente: elaboración propia.

De otro lado, en la Faceta ecológica, el profesor debe conocer el plan de estudio, el nivel donde se abordan los SEL, la presencia del tema en planes de estudio educativo donde aparece el objeto matemático, el vínculo con otros planes de estudio de otras áreas, su razón de ser dentro del área de matemática y en el currículo. En particular,

teniendo en cuenta el Currículo Nacional (PERÚ, 2016), organizado por ciclos, niveles y grados, se ha identificado que los SEL aparecen en el nivel Secundaria, ciclo VII, que incluye a los grados 3°, 4° y 5°. Sin embargo, los SEL también serán empleados en otras competencias relacionadas a la matemática, como son Resuelve problemas de cantidad y Resuelve problemas de forma, movimiento y localización, así como en otras áreas, como la de Ciencia y Tecnología. A continuación, se muestra la tabla 4, con indicadores de conocimiento sobre esta faceta.

INDICADOR	DESCRIPCIÓN
Ubicar los SEL en el sistema educativo.	El profesor debe conocer la organización del sistema educativo escolar peruano, dividido en niveles (inicial, primaria y secundaria), ciclos (I al VIII) y grados. Los SEL aparecen en el ciclo VII (3°, 4°, 5° secundaria).
Reconocer las imprecisiones del currículo escolar con respecto a los SEL.	Reconocer que el currículo no especifica los grados que deben desarrollar los SEL, ni que capacidades específicas lograr. Por eso, el profesor debe organizar el conocimiento y elaborar un plan de estudio que permita desarrollarlas cuando aborde los SEL. Además, dada la necesidad los SEL en otros temas del currículo, tanto matemáticos como no, la organización del conocimiento debe tener un alcance con las demás competencias del currículo, para cumplir con las expectativas cognitivas deseadas.
Conocer definiciones del currículo escolar.	Reconocer competencias, capacidades, estándares de aprendizaje y los desempeños, para lograr el perfil de egreso de los alumnos. Es importante, porque el docente debe organizar su conocimiento sobre los SEL para lograr dicho desarrollo en los alumnos.
Organizar los SEL en los libros de texto.	Los libros muestran el significado pretendido y el docente debe implementarlo, pero hay aspectos ausentes: indicar que el “método de gráfico”, no es un método; mostrar ejercicios con incógnitas diferentes a “x”, “y”, “z”; demostrar propiedades; indicar la relación de métodos de solución, para obtener sistemas de ecuaciones equivalentes; mostrar ejercicios sobre sistemas indeterminados o incompatibles; usar parámetros como coeficientes del sistema o términos independientes, para analizar condiciones el tipo de sistemas; indicar en que otros temas necesitarán aplicar SEL.
Reconocer otros temas del currículo que requieren de los SEL	Reconocer los grados y niveles donde se desarrollen temas que necesiten de SEL, así como otras áreas (Ciencia y Tecnología) que desarrollan temas que las usan (los de contextos físicos o químicos). Las situaciones se muestran en el significado de referencia construido en el capítulo 3.

Tabla 4. Indicadores del conocimiento del profesor, en la faceta ecológica sobre los SEL.

Fuente: elaboración propia.

Conclusiones

El modelo del CDM ofrece herramientas para un minucioso análisis que permite

identificar el conocimiento del profesor de matemática, sobre diversos objetos matemáticos, en particular para los SEL. Las herramientas que ayudan en esta tarea son la configuración de objetos primarios que permiten construir un significado de referencia institucional; también contribuyen a ello las consignas que presentó Godino (2009) en el marco del EOS, y que posteriormente Pino-Fan y Godino (2015) proponen de forma más específica, con preguntas para identificar qué conocimiento debe presentar el profesor en relación a cada faceta del conocimiento didáctico-matemático. A partir de ellas, se establece una lista de indicadores de conocimiento que debe tener el profesor en las dimensiones Matemática y Didáctica del modelo del CDM. Cuando se construye el significado de referencia, se logra organizar e identificar el conocimiento del profesor, no solo en la dimensión Matemática, sino también en torno a su conocimiento especializado (faceta epistémica) y sobre el currículo, cuando se analiza la faceta ecológica de la dimensión Didáctica.

Por otro lado, el trabajo realizado muestra un método que puede ser replicado para el estudio del conocimiento didáctico-matemático del profesor en otros temas, ya que, como se indicó anteriormente, aún son pocas las investigaciones y trabajos en didáctica matemática que expliquen los conocimientos específicos que debe tener un profesor de matemática.

Agradecimientos

Agradecemos a la Pontificia Universidad Católica del Perú – PUCP, Escuela de Posgrado – Maestría Enseñanza de las Matemáticas, específicamente a la línea investigación *Desarrollo de la competencia didáctico matemático en profesores de matemática*, por el apoyo brindado para concretizar la presente investigación.

Referencias

- DOUADY, R. **Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des Mathématiques. Une réalisation dans tout le cursus primaire.** Tesis Doctoral. Paris : IREM, Universidad de París, 1984.
- ESCUADERO, P. **Identificación de Conocimientos Didáctico-matemáticos, en la Faceta Epistémica, del profesor de educación secundaria, sobre funciones lineales y cuadráticas.** Tesis (Maestría en Enseñanza de la Matemática). Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú, 2017.
- GODINO, J. Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. **Unión**, n. 20, p.13-31, 2009.

GONZATO, M., GODINO, J., y NETO, T. Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. **Educación Matemática**, v. 23, n. 3, p.5-37, 2011.

MARTÍNEZ, M. La investigación cualitativa (Síntesis conceptual). **Revista de Investigación en Psicología**, v. 9, n. 1, p.123-146, 2006.

PERÚ, Ministerio de Educación del. **Currículo Nacional de la Educación Básica**. Lima: MINEDU, 2016.

PINO-FAN, L. **Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada**. Tesis (Doctorado en Educación Matemática). Granada: Universidad de Granada, 2013.

_____.; GODINO, J. Perspectiva Ampliada del Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor. **Paradigma**, v. XXXVI, n. 1, p.87-109, 2015.

RIVAS, M.; GODINO, J.; CASTRO, W. Desarrollo del Conocimiento para la Enseñanza de la Proporcionalidad en Futuros Profesores de Primaria. **Bolema**, v. 26, n. 42, p.559-588, 2012.

SEPÚLVEDA, O. **Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor universitario para la enseñanza del objeto Grupo**. Tesis (Doctorado en Ciencias de la Educación). Tunja-Boyacá: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, 2016.

VASCO, D. **Conocimiento especializado del profesor de álgebra lineal: un estudio de casos en el nivel universitario**. Tesis (Doctorado en Didáctica de las Ciencias y Filosofía). Huelva: Universidad de Huelva. 2015.