

La elipse: una secuencia didáctica mediada por el GeoGebra en estudiantes de nivel secundario

MARIO FERNANDO OLANO CRUCES¹

JESÚS VICTORIA FLORES SALAZAR²

Resumen

En este artículo se presenta un recorte de la investigación de primer autor que tiene como objetivo analizar la coordinación de los diferentes registros de representación semiótica para favorecer la comprensión de la condición geométrica de la Elipse en estudiantes de quinto año de educación secundaria (16-17 años de edad) de una institución educativa privada de Lima-Perú. La parte experimental consta de una secuencia didáctica de dos actividades mediada por el GeoGebra. Para este estudio, se utiliza como marco teórico la Teoría de Registros de Representación Semiótica y, en cuanto a la metodología, se basa en algunos aspectos de la Ingeniería Didáctica. Los resultados que se obtienen muestran que los estudiantes logran coordinar los diferentes registros de representación semiótica, lo cual les permite comprender la noción de Elipse en sus diferentes representaciones.

Palabras-clave: *Elipse; GeoGebra; Representaciones.*

Abstract

This paper presents part of the research done by the first author, aiming to analyze the coordination of the different registers of semiotic representation in order to help senior high-school students at a private educational institution in Lima, Peru, to better understand the geometric condition of the ellipse. The experimental part consists of a didactic sequence of two activities by means of GeoGebra. For this study, the Theory of Registers of Semiotic Representation is used as theoretical framework and, in regards to the methodology, it is based on some aspects of Didactic Engineering. The results show that students manage to coordinate the different registers of semiotic representation, which allows them to understand the notion of the ellipse in its different representations.

Keywords: *Ellipse; GeoGebra; Representations.*

Consideraciones iniciales

El interés por realizar esta investigación surgió a raíz del estudio de investigaciones sobre las secciones cónicas, especialmente la elipse. Estas investigaciones muestran que las dificultades de los estudiantes de nivel secundario de diferentes países del mundo en comprender la noción de Elipse, en vista que en su enseñanza prevalece las representaciones algebraicas dejando de lado las representaciones gráficas.

Así tenemos como referencia estudios que muestran la problemática del lugar geométrico elipse, como la investigación de Almouloud, Koné y Sangaré (2014), que

¹Pontificia Universidad Católica del Perú. Maestría en Enseñanza de las Matemáticas – a19760319@pucp.pe.

² Pontificia Universidad Católica del Perú. Maestría en Enseñanza de las Matemáticas –jvflores@pucp.pe.

subraya los problemas que tienen los estudiantes del tercer grado de la Escuela Secundaria de Mali (estudiantes entre 16 y 17 años), en el aprendizaje de las cónicas. Muestra además, que los profesores enfatizan los aspectos analíticos sobre los geométricos.

Por otro lado, la investigación de Ljajko y Ibro (2013) presenta que la enseñanza de la Geometría Analítica, en particular el estudio de la Elipse en tercer grado de la Escuela Secundaria de Serbia en estudiantes de 17 años, se hace sin utilización de tecnología digital es decir, con pizarra, tiza, cuaderno y lápiz, de tal forma que los estudiantes usan mucho tiempo en hacer el bosquejo de la Elipse que copian de la pizarra y no consiguen entender el concepto que encierra el lugar geométrico de la cónica.

También, Santos (2014) constata en su trabajo con estudiantes brasileños cuyas edades están comprendidas entre 16 y 18 años las dificultades en el aprendizaje de las cónicas que tienen los estudiantes para comprender las cónicas en sus diferentes representaciones. El autor presenta una investigación cualitativa que muestra la conversión (representación algebraica y grafica) de la representación de la Elipse que realizan estudiantes de secundaria de una escuela pública de la ciudad de Caieiras, en el estado de São Paulo.

En la misma línea, la investigación de Salazar y León (2016) muestra que la enseñanza de la Elipse, por lo general privilegia el tratamiento algebraico y omite su tratamiento como lugar geométrico. Por eso, los autores privilegian en su investigación la representación figural y gráfica al describir los procesos de instrumentalización de la condición geométrica de la Elipse, mediado por el Geogebra, cuando realizan el trabajo con seis estudiantes de Arquitectura, con edades entre 16 y 18 años, del curso de Matemática I en una Universidad particular de Lima-Perú que aprenden del concepto de Elipse al reconocer que la cónica es el lugar geométrico, cuya suma de sus distancias desde un punto de la Elipse a otros dos puntos fijos en el interior de dicha curva, es una constante igual a la longitud del eje mayor.

Igualmente, la investigación de Fahlgren y Brunström (2014) indica la importancia del uso de un ambiente de representaciones dinámicas, en especial el GeoGebra, en estudiantes de 17 años del último año de estudios secundarios de Suecia para actividades matemáticas, en particular el concepto de lugar geométrico de la Elipse para lograr el razonamiento y comprensión del objeto en estudio a través de la exploración,

conjetura, verificación, explicación y generalización.

Por otro lado, la investigación de León (2014) resalta la importancia de usar ambientes de representaciones dinámicas en la enseñanza de las Matemáticas, porque provee una herramienta a los estudiantes para comprender conceptos abstractos, hacer las representaciones de los objetos matemáticos y realizar las construcciones geométricas de los mismos, que en el aula son impartidos de forma tradicional y estática. Es decir, conceptos ya logrados, mientras que los elementos tecnológicos generan una interacción con el objeto matemático y se van descubriendo los conceptos, donde la principal característica es el dinamismo y abre en el área de las Matemáticas nuevas posibilidades para la enseñanza y aprendizaje.

En base a lo presentado, la investigación que se presenta tiene como objetivo general analizar la coordinación de registros de representación semiótica que realizan estudiantes de quinto año de secundaria cuando desarrollan una secuencia didáctica sobre la Elipse mediada por el GeoGebra.

Por ello, es importante establecer el marco teórico para identificar los diferentes registros de representación semiótica de la Elipse, así como la metodología para alcanzar nuestro objetivo general.

1 Aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica

En la investigación, se toma como base la Teoría de Registros de Representación Semiótica en la que según Duval (2004), pues para el autor el aprender matemáticas conlleva una serie de actividades cognitivas importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de contenidos. En consecuencia, el autor señala que estas actividades cognitivas requieren aparte de un lenguaje natural o de símbolos, el uso de diferentes registros de representación semiótica.

Así, Duval (1999) define un registro de representación como un sistema semiótico que tiene funciones cognitivas fundamentales para un funcionamiento cognitivo consiente. Además, el autor enfatiza que las representaciones son semióticas, es decir, las representaciones mentales realizadas y expresadas por el individuo a través del empleo de signos, no son más que una forma de exteriorizar en forma visible las producciones mentales del sujeto. También, señala que la aprehensión o la producción de una representación semiótica de un objeto matemático se denomina semiósis y las acciones

cognitivas del sujeto que derivan en la aprehensión conceptual de un objeto se denomina noesis. También, Duval (2004) señala que no hay noesis sin semiósis, es decir, ambas están ligadas porque la noesis es la representación mental del objeto matemático expresada a través de símbolos por la semiósis.

Para el investigador todo registro de representación semiótica debe cumplir tres actividades cognitivas inherentes a toda representación semiótica: producir la representación de alguna cosa y permitir la transformación de esa representación en otra por medio de una conversión y tratamiento.

Los registros de representación semiótica pueden, de acuerdo con el investigador, sufrir transformaciones de dos tipos: los tratamientos y conversiones. Un tratamiento de una representación es la transformación de esta representación en un mismo registro donde se formó, por lo tanto, es una transformación interna del registro mientras que la conversión es la transformación de representación que consiste en cambiar de un registro a otro.

De acuerdo con la Teoría de los Registros de Representación Semiótica, una de las condiciones de acceso a la comprensión en matemática es la articulación entre los registros, en esta etapa se hará una articulación entre dos tipos de registros diferentes llamada conversión.

Por ejemplo, un tratamiento es una transformación que se efectúa en el interior de un mismo registro, en el caso de nuestro objeto matemático, la Elipse, se puede hacer un tratamiento en el mismo registro algebraico. Mientras que la conversión se da, por ejemplo, cuando representamos la Elipse en el registro gráfico en un sistema de coordenadas bidimensional haciendo coincidir el eje mayor o eje focal de la Elipse con el eje x , y usando el gráfico se obtiene elementos de la Elipse, como las coordenadas de los focos y vértices para utilizar la noción geométrica de Elipse y al final de una serie de operaciones algebraicas (tratamientos) obtener la ecuación algebraica ordinaria de la cónica, es decir, la representación de la Elipse en el registro algebraico (ver figura 1).

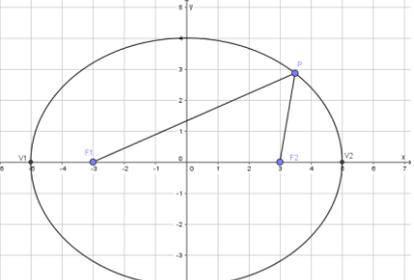
Duval (2004) distingue cuatro tipos de registros de representación semiótica: *lenguaje natural*, *figural*, *gráfico* y *algebraico*, tal como se muestra para la Elipse en la figura 2.

Duval (2006) señala con respecto a la actividad matemática:

La actividad matemática requiere que aunque los individuos empleen

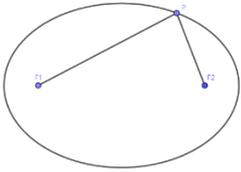
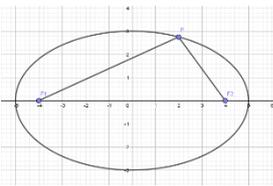
diversos sistemas de representación semiótica (registros de representación), solo elijan una según el propósito de la actividad. En otras palabras la actividad matemática requiere una coordinación interna, que ha de ser construida, entre los diversos sistemas de representación que pueden ser elegidos y usados; sin esta coordinación dos representaciones diferentes significarán dos objetos diferentes, sin ninguna relación entre ambos, incluso si son dos “contextos de representación” diferentes del mismo objeto.(DUVAL 2006, p.145)

Figura 1 – Conversión y tratamiento de la representación de la Elipse

Representación gráfica	Representación algebraica
	$d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(V_1, V_2)$ $\sqrt{(x+3)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(5+5)^2} \leftrightarrow$ $\sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x-3)^2 + y^2} \leftrightarrow$ $(x+3)^2 + y^2 = 100 - 20\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + (x-3)^2 + y^2 \leftrightarrow$ $20\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 100 - 12x \leftrightarrow 256x^2 + 400y^2 = 6400 \leftrightarrow$ $\frac{256x^2}{6400} + \frac{400y^2}{6400} = 6400 \rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

Fuente: Olano (2018, p. 27)

Figura 2 - Registros de representación semiótica de la Elipse.

Registro de lenguaje natural	Registro figural	Registro gráfico	Registro algebraico
<p>La Elipse es el conjunto de todos los puntos P del plano cuya suma de <i>distancias</i> a dos puntos fijos F₁ y F₂, llamados <i>focos</i>, es una constante.</p>			$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Fuente: Olano (2018, p. 27)

Es decir que los sistemas de representación semiótica son importantes no solo con fines de comunicación sino para el desarrollo de la actividad matemática donde está involucrado el objeto, por lo tanto, el tratamiento de los objetos matemáticos depende propiamente del sistema de representación semiótico utilizado.

2 Aspectos de la Ingeniería didáctica

En cuanto a la metodología, utilizaremos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), porque la investigación es cualitativa en donde se establecen las relaciones entre los sujetos y el investigador al realizar un trabajo experimental, y para nuestro caso se acomoda la Ingeniería Didáctica cuya autora señala que “la metodología de la ingeniería didáctica se caracteriza también, en comparación con otros tipos de investigación basados en la experimentación en clase, por el registro en el cual se ubica y por las formas de validación a las que está asociada” (ARTIGUE 1995, p.37).

Y en vista que, estamos interesados en analizar los procesos que realizan los estudiantes de quinto de secundaria cuando aprenden el concepto de Elipse en una secuencia de didáctica mediada por el GeoGebra la Ingeniería Didáctica es la metodología adecuada para el desarrollo de la presente investigación.

Artigue (1995) distingue cuatro fases: los análisis preliminares, la concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas, la experimentación, el análisis a posteriori y validación. En nuestra investigación en la fase de concepción consideramos una secuencia didáctica que consta de dos actividades. Asimismo, en el análisis a priori planteamos las posibles acciones esperadas en los estudiantes así como las estrategias que puedan emplear para solucionar los problemas y las dificultades que podrían enfrentar durante el proceso de la secuencia de actividades.

En la fase de experimentación, el investigador se pone en contacto con el grupo de estudiantes participantes de la investigación en el ambiente donde se llevara a cabo la experimentación y, aplica la secuencia de actividades elaborada para registrar de manera permanente los sucesos ocurridos durante la experiencia. En la última fase, el análisis a posteriori y validación, en nuestra investigación, en base a algunos aspectos de la Teoría de Registro de Representación Semiótica analizamos las acciones de los estudiantes de quinto de secundaria al desarrollar la secuencia de actividades mediada con el GeoGebra porque estamos interesados en la coordinación de los registros de representación semiótica que realizan los escolares cuando aprenden el concepto de Elipse. También, en esta fase se contrasta los supuestos esperados de los sujetos de investigación del análisis a priori, con los resultados que realmente obtienen los estudiantes al realizar las actividades diseñadas en la experimentación, es decir una

contrastación entre el análisis a priori con el análisis a posteriori, validando de esta manera el método.

3 Experimento y Análisis

En la investigación participaron, de manera voluntaria, seis estudiantes del quinto año de secundaria de una Institución Educativa Privada del distrito de Santiago de Surco, cuyas edades van de los 16 a 17 años.

Los sujetos de investigación traen conocimientos de Geometría Analítica en temas como distancia entre dos puntos, ecuación de la recta y circunferencia, que son los temas previos al tema de la Elipse, pero que no ha sido estudiado por ellos aún.

Cabe recalcar que, para preservar la identidad de los estudiantes por ser menores de edad, se establecieron tres duplas de trabajo etiquetadas como Dupla A, Dupla B y Dupla C, ya que se consideró conveniente la formación de duplas de trabajo para que los estudiantes pudieran interactuar e hicieran las conjeturas sobre el tema que aún no ha sido revisado en clase.

Encuentro Duración	Actividades	Descripción
1 60 minutos	Actividad 1: La condición geométrica de la Elipse	En la primera actividad, los estudiantes deben movilizar los conocimientos previos para construir la Elipse, por medio de construcciones geométricas fundamentales usando el ambiente de representaciones dinámicas, GeoGebra para hacer conjeturas acerca de la condición geométrica de la Elipse.
2 80 minutos	Actividad 2: Representación gráfica y algebraica de la Elipse	En la segunda actividad, los estudiantes deben movilizar los elementos de la Elipse y representarlos en un sistema de coordenadas cartesianas con la ayuda del GeoGebra para realizar tratamientos en la representación gráfica. Además, los estudiantes deben realizar conversiones entre el registro gráfico y algebraico para obtener las ecuaciones algebraicas de segundo grado en la forma general $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, y, mediante un tratamiento, obtener la ecuación en la forma ordinaria $x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$.

Cuadro 1-Descripción de la secuencia de actividades

Fuente: producción de los autores

La secuencia de actividades estuvo organizada en dos actividades, cuya duración, para la primera actividad, fue de 60 minutos y, la segunda, de 80 minutos de duración. Esta secuencia estuvo organizada por ítems que promovieron que los estudiantes coordinaran los registros figural y lengua natural y los registros algebraico y gráfico. En el Cuadro 1, mostramos la organización de la secuencia didáctica.

La secuencia de actividades fue planificada con la finalidad de permitir a los estudiantes la coordinación de los registros figural y de lengua natural y la coordinación de los registros algebraico y gráfico, para aprender el concepto de la Elipse como lugar geométrico.

Actividad 1: Elipse como lugar geométrico

La finalidad de esta actividad fue que las duplas de estudiantes lograran representar, en el registro figural, la condición geométrica de la Elipse a partir de sus conocimientos previos de la circunferencia, definida como el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo denominado centro; la mediatriz de un segmento, definida como el conjunto de puntos que equidistan de los extremos del segmento, congruencia de triángulos y distancia entre dos puntos. Una vez que representaran la condición geométrica de la Elipse, en el registro figural, se les pidió que expresaran dicha condición en el registro de lengua natural. En la figura 3 se muestra la ficha de la actividad 1

Se espera, a priori, que las duplas de estudiantes sigan las indicaciones de los ítems 1 al 4 de la actividad 1 para construir la representación de la Elipse en el registro figural. Asimismo, se desea que las duplas de estudiantes utilicen el Software dinámico ya que un dibujo construido utilizando un ambiente de representaciones dinámicas, como el GeoGebra, al aplicarle el desplazamiento o “arrastre” conservará sus propiedades, lo que permitirá caracterizar al objeto geométrico y a la vez favorecerá el uso de conocimientos geométricos.

Se espera que las duplas, durante el trabajo de la actividad 1, realizaran tratamientos de las representaciones de las posiciones que toma un punto interior en el registro figural, para obtener diferentes curvas al seguir las indicaciones de cada ítem propuesto que guarda relación con las variables didácticas. Además, se deseaba que las duplas realizaran conversiones de las representaciones de las construcciones geométricas logradas al seguir de las indicaciones del registro figural al de lengua natural.

Figura 3 - Ficha de la actividad 1

Actividad 1: Elipse como lugar geométrico

1. Abra el archivo ACT1.ggb y explore la construcción.
Sugerencia: arrastre el punto interior C dentro del círculo; el centro de la circunferencia con la condición que el punto C este dentro del círculo y; arrastre el punto B. Anote cada una de sus observaciones:
En base a lo observado en la exploración, responda las siguientes preguntas y justifique matemáticamente sus respuestas según sea el caso:
a) ¿Qué relación tienen los segmentos CD y BD?
b) ¿Qué relación tiene la suma de los segmentos AD y DC con respecto a la circunferencia?
2. Arrastre el punto interior C a otra posición interior en el círculo, active el rastro del punto D, luego arrastre el punto B. Repita varias veces esta exploración. (sugerencia: desactive el rastro cuando desea cambiar la posición del punto C, luego actívelo como en la exploración anterior).
En base a lo observado ¿Qué relación tiene la suma de los segmentos AD y DC con respecto a la circunferencia al mover el punto interior C? Explique.
3. Abra el archivo ACT1_preg_3.ggb y explore la construcción.
Cambie el valor del radio con la condición que el punto C sea interior al círculo, y arrastre el punto B y vuelva explorar la construcción realizada varias veces. En base a lo observado ¿Qué puedes concluir acerca de la suma de los segmentos AD y DC al variar el radio de la circunferencia? Justifique su respuesta.
4. Utilice la herramienta  del Geogebra y construya la Elipse por los puntos A, C y D y determine la longitud del segmento EF que resulta de intersectar la recta que pasa por A y C con la Elipse. En base a ello, ¿Qué relación se puede establecer con la suma de los segmentos AD y DC y la longitud del segmento EF al mover el punto C, luego el punto A? y si varía el radio?
Al finalizar, graba en tu computadora el trabajo realizado con el nombre ACT1.

Fuente: Olano (2018, p.65)

Mostraremos una parte del trabajo experimental de la investigación, para eso señalamos tanto el análisis a priori y a posteriori de una de las duplas.

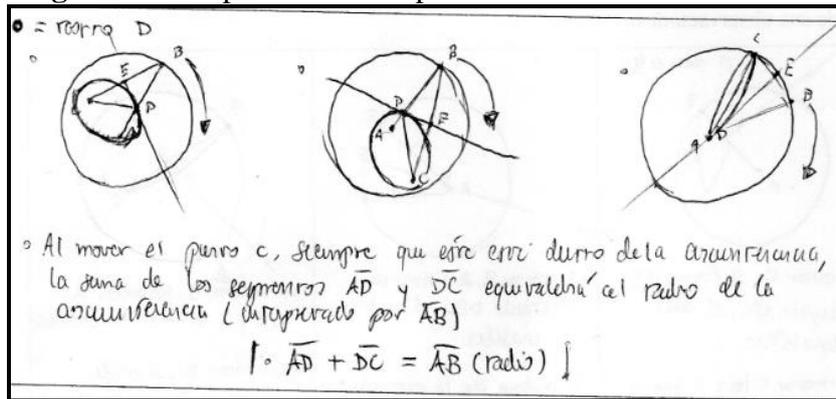
En el análisis a priori, en el ítem 2, se piensa que las duplas, al realizar un arrastre del punto interior representado por C a otra posición interior del círculo (variable didáctica), logren obtener una nueva representación de la Elipse en el registro figural.

En cuanto a la pregunta, se espera que las duplas puedan conjeturar que la representación de la Elipse en el registro figural se deba a la propiedad geométrica de la congruencia de segmentos comprobada anteriormente, por lo que se piensa que pueden dar como respuesta que la suma de las medidas de los segmentos AD y CD es constante e igual al valor del radio.

En cuanto al ítem 2, la Dupla A obtuvo lo esperado en el análisis a priori, porque muestra los tratamientos de la representación de la Elipse en el registro figural al obtener diferentes figuras para la curva al marcar el rastro del punto representado por D y mover la variable didáctica, el punto representado por C, a diferentes posiciones, tal

como se muestra en la figura 4.

Figura 4 - Respuesta de la dupla a del ítem 2 en la actividad 1

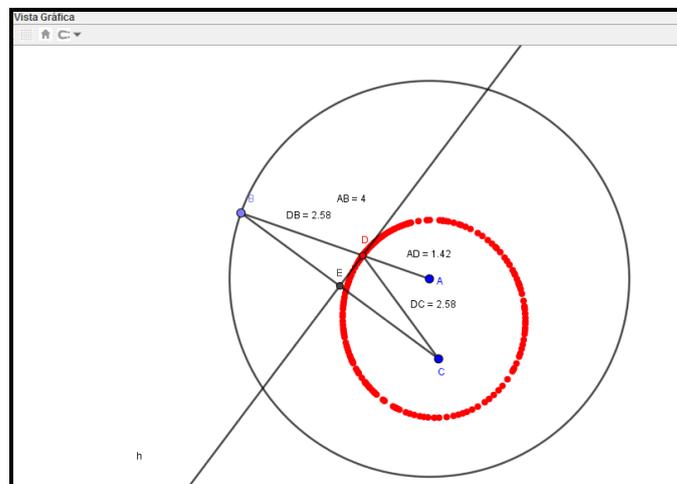


Fuente: Olano (2018, p. 71)

La Dupla A señaló que la relación existente entre la suma de las medidas de las longitudes de los segmentos AD y DC con respecto a la circunferencia al mover el punto interior representado por C es igual al radio de la circunferencia, tal como se señala en el análisis a priori.

Asimismo, en el sentido de Duval, los estudiantes coordinaron registros, primero al dibujar las diferentes curvas que deja el punto representado por D al maniobrar la variable didáctica (Punto interior representado por C) y luego expresar el resultado como una propiedad geométrica que se cumple en cualquiera de las diferentes figuras obtenidas para poder expresarlo en lengua natural; es decir, la Dupla A evidenció la conversión de la representación de la Elipse del registro figural al de lengua natural, tal como se observa en la figura 4.

Figura 5 - Respuesta de la Dupla A del ítem 2 en la actividad 1. Archivo de GeoGebra.



Fuente: Olano (2018, p. 74)

En la figura 5 se muestra la respuesta de la Dupla A de la representación de la Elipse en

el registro figural con el archivo del ambiente de representaciones dinámicas, GeoGebra.

En efecto, en la respuesta de la Dupla A evidenció, primero que utilizó la herramienta *distancia o longitud* del GeoGebra para medir las longitudes de los segmentos CD y DB e indicó que estas longitudes de los segmentos son iguales y segundo mostró la representación de la Elipse en el registro figural al arrastrar el punto representado por B.

Actividad 2: Representación gráfica y algebraica de la Elipse

La finalidad de esta actividad fue que los estudiantes de la duplas logren representar la Elipse en los registros gráfico y algebraico a partir de sus conocimientos básicos de Geometría Analítica, como la distancia entre dos puntos y la condición geométrica de la curva; es decir, el lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es siempre una constante e igual a la medida de la longitud del eje focal y mayor que la distancia entre los focos. Además, los estudiantes de las duplas reconocen los elementos de la Elipse referidos al sistema de coordenadas cartesianas que les permitirán transitar del registro gráfico al registro algebraico al utilizar la condición geométrica de la Elipse. En la figura 6 se muestra la ficha de la actividad 2.

Según la Teoría de Registros de Representación Semiótica, las condiciones para la comprensión de un concepto matemático se dan en la coordinación que existe entre registros diferentes; es decir, cuando ocurre la conversión de la representación de un objeto matemático, en nuestro caso la Elipse, de un registro en otro.

Con este fin, diseñamos una actividad que lleve a los estudiantes realizar una conversión de la representación de la Elipse del registro gráfico al algebraico para comprobar la comprensión de la condición geométrica de la Elipse o lo que es lo mismo decir, describir mediante ecuaciones algebraicas el lugar geométrico de la Elipse.

En el ejercicio deseamos que las duplas reconozcan la gráfica de la Elipse en un sistema de coordenadas cartesianas, con centro en el origen, cuando el eje mayor o focal coincide con el eje x y pensamos que a partir del gráfico pueden obtener los elementos de la Elipse, que les permitan, por medio de una conversión de la representación de la Elipse del registro gráfico al algebraico, obtener la representación algebraica de la cónica dada por la ecuación algebraica general $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ y por medio de

tratamientos de la representación de la Elipse en el registro algebraico obtener la representación algebraica de la curva expresada por la ecuación algebraica ordinaria

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ de dicha Elipse.}$$

Figura 6 - Ficha de la actividad 2.

Actividad 2: Representación gráfica y algebraica de la Elipse

Abra el archivo ACT2.ggb realice lo siguiente:

- Con la herramienta  mida los segmentos: EF, AB, AP, BP, AG y LG, luego explore la construcción, para ello arrastre el punto C y observa que sucede con la medida de los segmentos y responda:
 - ¿Qué segmento permanece constante? Justifique matemáticamente.
 - ¿Qué sucede con la suma de segmentos AP y PB? Explique detalladamente.
- Explore la construcción moviendo el punto A o B. y responda, en cada caso, las explicando sus procedimientos:
 - ¿Qué segmento mantiene la misma longitud?
 - ¿Qué sucede con la suma de segmentos AP y PB?
 - ¿Encuentra alguna relación en la medida del segmento AL?
- Arrastre los puntos A y B de tal forma que los ubique en (-4; 0) y (4; 0) respectivamente y, C en (0; 3), luego asuma un punto P genérico (x; y) y utilice la condición geométrica de la Elipse para determinar la ecuación algebraica de la Elipse de la forma cuadrática $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. En seguida responda la siguiente pregunta: *¿Qué valores de los hallados en la indicación corresponden a los coeficientes a y b, determinados en la ecuación cuadrática?*
- Con la ecuación algebraica obtenida en el paso anterior, exprésala de la forma estándar o canónica $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Responda la siguiente pregunta:
 - ¿Qué relación tienen las constantes a y b con la medida de alguno de los segmentos hallados en la indicación 1?
 - Expresa la condición geométrica de la Elipse en términos de una de estas constantes.

Al finalizar, graba en tu computadora el trabajo realizado con el nombre ACT2.

Fuente: Olano (2018, p. 84)

Consideraciones finales

La secuencia didáctica fue diseñada para observar y analizar la coordinación entre el registro figural y lengua natural y el registro gráfico y algebraico. Además, los estudiantes realizaron las construcciones geométricas relacionadas con la Elipse, con la mediación del Software de Geometría Dinámica, GeoGebra.

En ese sentido, en la secuencia de actividades se les pidió a los estudiantes que realizaran la representación de la Elipse en el registro figural para comprender la condición geométrica de la cónica. Luego, los estudiantes realizaron una representación verbal de la Elipse (registro lengua natural) y después representaron la cónica en el registro gráfico, en primera instancia, con el fin de conocer sus características y sus

elementos para terminar de representarla en el registro algebraico por medio de una ecuación.

Asimismo, la intervención del ambiente de representaciones dinámicas, GeoGebra, fue importante como herramienta dinámica en la construcción de la condición geométrica de la Elipse, porque los estudiantes pudieron observar, reconocer, movilizar propiedades y elementos geométricos para poder realizar conjeturas que le permitieron construir el objeto matemático en sus diferentes representaciones.

En cuanto a la secuencia didáctica, en la primera actividad, obtuvieron el registro figural de la cónica que les permitieron comprender la condición geométrica de la curva, mientras que en la segunda actividad, los estudiantes obtuvieron la representación de la Elipse en el registro algebraico por medio de la representación de la cónica en el registro gráfico, por el cual obtuvieron los elementos y características de la Elipse.

Por lo tanto, se identificaron los registros figural, gráfico y algebraico de la representación de la Elipse al desarrollar la secuencia de actividades.

Hemos observado que los estudiantes lograron una mayor comprensión de la condición geométrica de la Elipse cuando coordinan las construcciones por medio del registro de figural al de lengua natural y del registro gráfico al algebraico.

Agradecimientos

Agradecemos a la Pontificia Universidad Católica del Perú – PUCP, Escuela de Posgrado – Maestría Enseñanza de las Matemáticas, específicamente a la línea investigación *Tecnologías y Visualización en Educación Matemática – TecVEM* por el apoyo brindado para concretizar la presente investigación.

Referencias

ALMOULOUD, S. A.; KONÉ, C.; SANGARÉ, M. S. Study of the mathematical and didactic organizations of the conics in the curriculum of secondary schools in the Republic of Mali. International **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 4, n. 3, p. 2-28, 2014.

ARTIGUE, M. Ingeniería Didáctica. **In: Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas**. ARTIGUE, M., DOUADY, R., MORENO, L. & GOMEZ, P. (editores), 33-61, 1995.

DUVAL, R. **Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning**, 1999.

- _____. **Semiosis y pensamiento humano**. Trad. Myriam Vega. Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, 2004. (Obra original publicada en 1999).
- _____. Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. **La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española**, v. 9, n. 1, p. 143-168, 2006.
- FAHLGREN, M.; BRUNSTRÖM, M. A model for task design with focus on exploration, explanation, and generalization in a dynamic geometry environment. **Technology, Knowledge and Learning**, v. 19, n. 3, p. 287-315, 2014.
- LEÓN, J. **Estudio de los procesos de instrumentalización de la elipse mediado por el Geogebra en alumnos de arquitectura y administración de proyectos**. Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas. Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú, 2014.
- LJAJKO, E.; IBRO, V. Development of Ideas in a GeoGebra-Aided Mathematics Instruction. **Online Submission**, v. 3, n. 3, p. 1-7, 2013.
- OLANO, M. **Registros de Representación Semiótica de la Elipse: Secuencia de actividades mediada con el Geogebra para estudiantes de quinto de secundaria**. Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas. Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú, 2018.
- SANTOS, J. **Um diagnóstico da aprendizagem da cônica elipse no ensino médio**. Tesis de Maestría en Educación Matemática. Universidade Anhanguera de São Paulo. Programa de pós-graduação em Educação Matemática, 2014.
- SALAZAR, J. V. F., & RÍOS, J. C. L. Génesis instrumental: un estudio de la instrumentalización de la condición geométrica de la elipse. **REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 10, n. 2, p. 23-41, 2016.