

Teorema Fundamental del Cálculo: Un Estado del Arte

BRIAN VALENZUELA PAGAZA¹

KATIA VIGO INGAR²

Resumen

La importancia del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) como herramienta de cálculo en cursos de formación del ingeniero además por la relación que establece entre el cálculo diferencial e integral motivó la presente investigación, cuyo objetivo es realizar un Estado del arte de las investigaciones empleadas en nuestra tesis de Maestría, cuyo foco es el estudio TFC con la finalidad de conocer el modo en que es abordado en la enseñanza y aprendizaje con el apoyo de la tecnología. Afirmamos, que el uso de software y calculadoras permiten al estudiante coordinar distintas representaciones de los objetos que intervienen en el TFC además, de ser una gran apoyo para elaboración de sus propias conjeturas. El estudio realizado muestra que la noción de función, continuidad y variación son importantes en el aprendizaje del TFC.

Palabras-clave: Teorema Fundamental del Cálculo; Estado de Arte; Enseñanza Superior.

Abstract

This research was motivated by the importance of the Fundamental Theorem of Calculus (FTC) as a calculation tool for engineer training courses, in addition to the relationship established between the differential and integral calculus. Its objective is to do a compilation of the researches used in our Master's thesis, whose focus is the FTC study in order to know the way it is approached in teaching and learning with the support of technology. We state that the use of a software and calculators allow students to coordinate different representations of the objects that intervene in the FTC, apart from being a great support for the elaboration of their own conjectures. This study shows that the notion of function, continuity and variation are important in the learning of the FTC.

Keywords: Fundamental Theorem of Calculus; State of the art; Higher Education.

Introducción

La enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial e integral es un tema bastante discutido en diversas investigaciones realizadas en el campo de la Educación Matemática, siendo esta una de las problemáticas más abordadas por los investigadores.

Con la finalidad de aportar a la comunidad investigadora realizamos un estudio bibliográfico de trabajos que tienen como foco de estudio la enseñanza y aprendizaje del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) con el apoyo de herramientas como software y calculadoras. El estudio del TFC es un tema pertinente a investigar debido al papel que desempeña en el cálculo, estableciendo la relación entre los procesos de derivación e

¹Pontificia Universidad Católica del Perú. Maestría en Enseñanza de las Matemáticas – a20143610@pucp.pe.

² Pontificia Universidad Católica del Perú. Maestría en Enseñanza de las Matemáticas – kvigo@pucp.pe.

integración además, de articular conceptos matemáticos como el de función, límite y continuidad.

En busca de tener un panorama de los estudios realizados en relación al TFC y estudiar algunas de las propuestas de solución planteadas por diversos investigadores a la problemática mencionada anteriormente nos proponemos realizar un Estado del arte, siendo este estudio nuestro objetivo, de las investigaciones consideradas como antecedentes de nuestra Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas realizada en Perú. El uso de herramientas tecnológicas es el criterio que emplearemos para sistematizar y organizar las tesis y artículos considerados. Afirmamos, que realizar actividades con el apoyo de herramientas tecnológicas como software o calculadoras en la enseñanza y aprendizaje del TFC permiten al estudiante coordinar distintas representaciones de los objetos que intervienen en el TFC además, de ser un gran apoyo para elaboración de sus propias conjeturas para resolver los problemas.

1 Metodología

Para realizar un estado del arte consideramos dos procedimientos generales, en primer lugar debemos hacer una búsqueda, selección, clasificación y disposición de fuentes de información y en segundo lugar, debemos realizar una integración de la información obtenida, esto es, hacer un análisis de la misma la cual nos permite tener un panorama global e integrador del área del conocimiento en cuestión. En este sentido, para Fiorentini y Lorenzato (2006) una investigación que sigue la metodología Estado del arte se caracteriza porque “procura inventariar, sistematiza y evaluar la producción científica en una determinada área (o tema) del conocimiento buscando identificar tendencias y describir el estado de conocimiento de una determinada área de estudio” (p.103).

La finalidad de realizar un estado del arte de un determinado objeto de estudio es descubrir la concepción e interpretación que tienen los investigadores sobre el objeto en cuestión, esto es, hacer explícita la postura teórica y metodológica que presentan sus investigaciones.

Realizar un estado de arte es equiparable con la revisión de antecedentes, pues nos permitirá tener un panorama actual del objeto de estudio en cuestión. Por ejemplo, en nuestra tesis de maestría realizamos un estado del arte de las investigaciones que empleaban tecnologías al abordar la enseñanza y aprendizaje del TFC.

Según Gómez, Galeano y Muñoz (2015) con respecto a los objetivos de realizar una investigación bibliográfica siguiendo esta metodología se pueden establecer cuatro niveles los cuales son denominados por los autores de la siguiente manera: nivel 1, este consiste en explorar y obtener conocimiento del objeto de estudio en cuestión para poder vislumbrar a donde se quiere llegar con la investigación; nivel 2, construir un saber, esto es, delimitar el estado actual en el que se encuentra el desarrollo teórico lo cual puede ser empleado más adelante como referencial teórico para futuras investigaciones; nivel 3, comprender un fenómeno, con respecto a este nivel los investigadores plantean que elaborar un estado del arte consiste en elaborar un documento, instrumento o metodología que permita ser una guía para perfeccionar una determinada temática; nivel 4, este nivel consiste en crear un marco conceptual o un balance documental, esto es, elaborar marcos conceptuales que amplíen la comprensión del objeto de estudio mostrándolo desde diferente enfoques del conocimiento. A continuación, en la Figura 1 mostramos los niveles mencionados.

Figura 1- Finalidades del estado del arte.



Fuente: Gómez et al (2015, 433)

En relación a los procedimientos metodológicos, la información recolectada en las tesis y artículos fue organizada y sistematizada. Los datos considerados fueron recolectados principalmente de revistas de divulgación científica, como Scielo, Latindex, y las tesis fueron investigadas en direcciones electrónicas de Universidades y en bibliotecas, con el auxilio del portal electrónico de la CAPES (Coordinación de Perfeccionamiento de

Personal de Nivel Superior de Brasil) y el banco de tesis de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP).

2 Análisis de las investigaciones

El criterio utilizado en el análisis de las investigaciones seleccionadas fue el uso de tecnologías, entre las que encontramos calculadoras y software educativos. Entre los trabajos analizados tenemos, la investigación de Grande (2013) es una tesis doctoral en la que el investigador realiza una experimentación en clase con la finalidad de que emerja la relación entre las operaciones de integración y de derivación además, bajo qué condiciones se establece esa relación. Las actividades diseñadas por el investigador están basadas en la noción de acumulación de una función y son desarrolladas con el apoyo del software GeoGebra.

El autor afirma que emplear la noción de acumulación al abordar el concepto de integral, interpretar la derivada como variación o razón de cambio, la continuidad de una función, la noción de función y su representación gráfica, son fundamentales en la enseñanza y aprendizaje del TFC. La noción de acumulación permitirá interpretar y manipular la siguiente expresión $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, no sólo como el área bajo la curva, esto permitió al investigador diseñar situaciones contextualizadas las cuales se basan en obtener una función a partir de su variación, por ejemplo, hallar la función que modela el volumen acumulado a partir de su razón de cambio.

Las bondades mencionadas que presenta la noción de acumulación permitieron al autor diseñar actividades que relacionan el registro gráfico con el algebraico, empleando para ello el apoyo del GeoGebra logrando así encontrar un enfoque diferente al tradicional, el área bajo la curva.

Además, trabajar con la expresión $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ permitirá a los estudiantes movilizar sus conocimientos previos, entre los que destacan la noción de función, que permitirá a los estudiantes manipular y entender la expresión mencionada y la noción de continuidad la cual permitirá a los estudiante analizar las condiciones necesarias que debe tener la función integrando para poder aplicar el TFC.

La investigación realizada por Grande (2013) utiliza los fundamentos teóricos planteados por Henri Poincaré (2008) sobre el uso de la intuición en la construcción del pensamiento matemático, además, de los conceptos y características del razonamiento

intuitivo en la ciencia y las matemáticas descritas por el psicólogo Efrain Fischbein (1999). Para analizar los resultados obtenidos en las actividades realizadas Grande (2013) empleó como marco teórico la visualización en la educación de cálculo y las interrelaciones con la intuición y rigor, planteados por David Tall (2002).

Con respecto a la metodología, esta es cualitativa, y está basada en los fundamentos planteados por Creswell (2010), quien afirma que una investigación cualitativa puede interpretarse como una herramienta para explorar y comprender los significados que tiene una persona o un grupo de personas sobre un problema de naturaleza humana o social.

El estudio realizado por Grande (2013) tiene como objetivo hacer un estudio didáctico epistemológico del TFC, mostrando una actividad desarrollada en clase que permita emerger la relación entre las operaciones de integración y de derivación, además, bajo qué condiciones se establece esta relación, lo cual es la esencia del teorema. Para ello realizó un cuestionario piloto con 14 alumnos, de la facultad pública de Tecnología en el Estado de São Paulo, en el cual se analiza los conocimientos que tienen los estudiantes al abordar tópicos como, acumulación, funciones, razón de cambio, relaciones entre la función y su primitiva, los cuales influyen en el aprendizaje del TFC. Posteriormente, se realiza una actividad con otros estudiantes, de la misma institución, desarrollada con el GeoGebra.

Por lo que se refiere a los resultados obtenidos, el cuestionario piloto comprobó en un principio que los estudiantes tuvieron dificultades al interpretar la función representada por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, pues, no realizaron la interpretación de la integral, la acumulación. La interpretación que tenían los estudiantes de la integral definida, una herramienta para calcular áreas; también, se evidenció que la derivada no era interpretada como una razón de cambio, sino como la pendiente a una curva; por último, se observó que la noción de función y continuidad no estaban muy desarrollados.

En el segundo cuestionario se realizaron dos tareas en el aula, las cuales permitieron relacionar conceptos tratados anteriormente por los estudiantes con el TFC, como la noción de función, continuidad, variación y acumulación, la continuidad de una función resultó ser una condición necesaria para aplicar el TFC, esto se evidenció en la primera tarea al calcular el volumen del sólido planteado. Además, la idea de acumulación estuvo presente en las dos tareas, al igual que la noción de variación entre dos

cantidades.

Para el investigador abordar el TFC usando la noción de acumulación produjo una mejora significativa en la comprensión del concepto de integral, además, de permitir que logren articular los procesos de derivación e integración. Motivo por el cual Grande (2013) afirma que, el uso del GeoGebra facilita el aprendizaje e interpretación de las nociones de acumulación y variación de una función, pues estos son conceptos dinámicos, siendo una herramienta que permite interpretar y observar patrones de ciertas cantidades, como la sección del sólido, la acumulación al calcular las integrales, entre otras, las cuales les permiten desarrollar las nociones mencionadas.

El trabajo de Scucuglia (2006), es una tesis de maestría en la cual el investigador experimenta con calculadoras gráficas, Texas TI-83, estas permiten a los estudiantes, dos parejas que cursan el primer año de graduación en matemática de la Universidad Estatal Paulista (UNESP), coordinar diversas representaciones como la gráfica, algebraica y tabular, lo cual es de gran ayuda para elaborar conjeturas que permitirán probar el TFC usando un lenguaje no tan formal como el matemático, pero sin quitarle lógica a la prueba de la tesis de dicho teorema.

Las calculadoras mencionadas, los comandos que presentan, permitieron a los estudiantes formar conjeturas de algunos procesos envueltos en la integración, por ejemplo, en primer lugar, el área exacta bajo la curva que se obtiene empleando sumas de Riemann con infinitos rectángulos; segundo, la siguiente suma $\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$ es negativa cuando la imagen de la función es negativa; tercero, la integral definida que es el límite de la suma de Riemann con lo cual relacionan la integral con el área bajo la curva; cuarto, la integral definida que coincide con el área bajo la curva sólo cuando el integrando es una función positiva y por último, relacionan la integral definida con la antiderivada identificando patrones que se muestran en el desarrollo de la cuarta actividad; los cuales les ayudarán a realizar formulaciones y pruebas sobre el TFC para el caso de una función positiva usando un lenguaje coloquial.

Para responder a la pregunta ¿Cómo estudiantes con calculadoras gráficas investigan el Teorema Fundamental del Cálculo? El investigador realiza una secuencia de actividades con la calculadora y con lápiz y papel, las cuales le permitirán obtener datos que serán analizados con el marco teórico y metodológico: La concepción epistemológica Seres-Humanos-con-Medios, planteada por Borba y Villarreal (2005), la

cual resalta el papel de los medios en el proceso de producción de conocimiento matemático.

El investigador elaboró y aplicó cinco actividades las cuales están enfocadas a desarrollarlas empleando los comandos de la calculadora con la finalidad de formar las conjeturas mencionadas anteriormente. Estas actividades siguen una secuencia lógica la cual consiste en partir de lo visual e intuitivo para, posteriormente, ir formalizándolo poco a poco. En, la primera actividad se plantea obtener el área bajo la curva para funciones positivas empleando sumas inferiores y superiores, esta actividad se realiza con la ayuda del comando AREA, el cual permite plantear la siguiente conjetura: al aumentar el tamaño de la partición el error en el cálculo del área disminuye, además, el área exacta se dará cuando el tamaño de la partición sea infinito.

La segunda actividad se realiza con el comando AREA y SUMA, la diferencia entre estos comandos es que en el comando suma se puede obtener la suma de infinitos rectángulos y con ello validar la conjetura que tienen los estudiantes. En la tercera actividad se utiliza el comando $\int f(x) dx$, el cual permite obtener la integral definida $\int_a^b f(x)dx$, el valor obtenido, mediante este comando, se puede comparar con resultado obtenido con el comando SUMA, lo cual permite a los estudiantes establecer la relación entre las sumas de Riemann y la integral definida, esto es: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$ y como aplicación de este resultado se plantea la pregunta de cómo encontrar el área entre dos curvas, la cual es resuelta por los estudiantes. La cuarta actividad consiste en obtener distintos resultados para la integral definida, usando el comando $\int f(x) dx$ haciendo variar el límite superior.

Estos resultados permiten a los estudiantes realizar la conexión entre la integral definida de una función con su antiderivada, esto es $F'(x) = f(x)$, donde $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Por último, la quinta actividad consiste en calcular la integral definida $\int_a^b f(x)dx$, empleando el comando $\int f(x) dx$, el objetivo de esta actividad es que los estudiantes puedan deducir la expresión $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, para lo cual ellos completan el cuadro 1.

Ecuación	Intervalo	$\int_a^b f(x)dx$
$y = 2x$	[1; 2]	3
	[2; 3]	5
	[1; 3]	8
	[a, b]	$b^2 - a^2$

Cuadro 1. Quinta actividad

Fuente: Adaptada de Scucuglia (2006, p.93)

Con el cuadro mostrado, los estudiantes elaboran la siguiente conjetura: para calcular la integral definida de una función sólo hay que evaluar la antiderivada del integrando en los límites superior e inferior y restarlos, debemos mencionar que el investigador realizó los cuadros con dos funciones más, $y = 3x^2$ y $y = 4x^3$. Con los resultados obtenidos y con el objetivo generalizar estos resultados a más funciones se realiza una última actividad a lápiz y papel en la cual los estudiantes logran probar el TFC para funciones continuas y positivas.

Scucuglia (2006) señala que el uso de la calculadora y su carácter multirregistro permitieron la formación de conjeturas las cuales fueron de apoyo para realizar la prueba del teorema, además las representaciones múltiples que ofrece la calculadora posibilitaron que el hacer matemática sea vuelva un proceso experimental que es una característica en la formación del aprendizaje según la teoría Seres Humanos con Medios.

Los investigadores Robles, Tellechea y Font (2014) diseñan una secuencia didáctica de tareas direccionada a la enseñanza del TFC las cuales tienen la finalidad que el estudiante descubra, basándose en su intuición, la esencia del TFC. Las actividades están basadas en la noción de acumulación y serán desarrolladas con la herramienta tecnológica Applet Descartes, el cual tiene la finalidad de promover la identificación de patrones y la conjetura.

El artículo desarrollado por los investigadores evidencia que las representaciones dinámicas favorecen la articulación del lenguaje numérico, con el gráfico y con el analítico con el TFC pues permite visualizar la relación de la función con su integral,

además los investigadores mencionan que el TFC representa un elemento clave porque articula objetos matemáticos del Cálculo como el límite, funciones, la derivada y la integral; sin embargo, su enseñanza toma una perspectiva analítica que deja de lado la experiencia intuitiva del estudiante.

La investigación tiene como objetivo diseñar una secuencia didáctica de tareas para la enseñanza del TFC que considere la complejidad de los objetos matemáticos del Cálculo y el rol de este teorema en la articulación de estos objetos, para ello presentan una propuesta de la secuencia didáctica de tareas en donde se resalta: la conceptualización de la integral por encima de la mecanización; las perspectivas gráficas y geométricas para dar significación a los procesos de derivación e integración, es decir, promueve el proceso de visualización mediante el uso de los recursos visuales mediante el uso del software Descartes.

El marco teórico utilizado por los investigadores es el Enfoque Ontosemiótico (EOS) el cual les permite diseñar una secuencia de tareas que consiste en la aplicación de applets, empleando los seis criterios de idoneidad: en relación a la epistémica, porque las actividades promovieron en los estudiantes la construcción del significado en torno al proceso aproximativo del área bajo una curva y el descubrimiento de la relación que existe entre la función estudiada y su función integral.

Con respecto a la cognitiva, porque cuando el alumno parte de la noción básica de función constante el alumno se acerca por intervalos a la idea de variación acumulada, después infiere sobre la existencia de una función que describe la variación de esta acumulación, además los alumnos grafican y conjeturan sobre la relación entre la curva obtenida y la función estudiada; interaccionar, porque la redacción del material impreso y las applets de trabajo muestra brevedad de texto, sencillez de lenguaje y modulación de los apartados.

Respecto a la mediacional, porque se adecúan los recursos materiales y temporales para todos los alumnos, es decir, a todos los alumnos se les asigna la manipulación de un applet en determinado momento y los demás observan en una pantalla las interacciones con los applets y hacen los apuntes que consideren necesarios.

Se verifica lo emocional, porque los alumnos se encuentran motivados y entusiasmados por su participación con los materiales de trabajo, además que se muestra integración entre los alumnos rezagados y los aventajados. Por último, la ecológica, por la

correspondencia a las expectativas curriculares y porque se espera que los significados construidos con esta secuencia didáctica de tareas propuestas faciliten el tratamiento formal posterior del TFC.

Acerca de la metodología que guía la investigación, los investigadores no la muestran de manera explícita, pero hemos percibido que esta tiene características similares con la ingeniería didáctica. Por ejemplo, el modo contrastar los datos, quiere decir, lo que esperaba que realicen los estudiantes (*a priori*) con lo realizado por ellos (*a posteriori*). La secuencia de tareas propuesta por Robles *et al* (2014) está formada por cinco actividades de las cuales, las tres primeras serán trabajadas por los alumnos y los dos restantes por el profesor. A continuación, detallamos las actividades realizadas por los investigadores.

En la actividad 1, se les presenta a los alumnos la gráfica de tres funciones constantes en un intervalo para que construyan su respectiva función integral y observen que estas son lineales y que su representación gráfica tiene una pendiente que queda determinada por dicha constante, primero el alumno debe trabajar con lápiz y papel y luego con Applet Descartes se evalúan las conjeturas hechas por los alumnos *a priori*. En la actividad 2, se trabaja de manera semejante, pero con un par de funciones escalonadas sencillas, aquí se espera la construcción gráfica que sugiera al alumno la existencia de un vínculo entre la discontinuidad de la función y la no derivabilidad de la función integral.

En la actividad 3 se espera llegar a la conclusión de que la integral de una función lineal es una parábola cuya concavidad depende del signo de la pendiente de la función y cuyo vértice queda determinado por la intersección de la función con el eje de las abscisas. En la actividad 4 se constituye la visualización del TFC y se sugiere su institucionalización, y en la actividad 5 se constata de manera visual que la derivada de la integral es la función original lo que constituye la expresión del TFC.

En suma, Robles *et al* (2014) manifiestan que las representaciones dinámicas favorecen la mejor articulación del lenguaje numérico, con el gráfico y con el analítico sobre todo en relación con el TFC donde se genera evidencia visual de la relación de la función y su integral. Además, los autores expresan que, aunque los criterios de idoneidad del EOS se utilizaron *a priori* en el diseño de la secuencia didáctica de tareas presentada, también es necesario realizar diversas implementaciones y utilizar los mismos criterios de idoneidad *a posteriori* para que se pueda evaluar la calidad del proceso de

instrucción y tener elementos para el rediseño si fuese necesario para así mejorar la secuencia didáctica de tareas presentada.

El **Erro! Fonte de referência não encontrada.** muestra el criterio utilizado en el análisis de las investigaciones seleccionadas, el uso de tecnologías, entre las que encontramos calculadoras y software educativos.

Autor(es)	Tecnologías
Grande (2013)	Software GeoGebra
Scucuglia (2006)	Calculadoras Texas TI-83
Robles et al (2014)	Applet Descartes

Cuadro 2. Uso del criterio para clasificar las investigaciones
Fuente: Propia

Hasta aquí hemos presentado tres investigaciones en las cuales se utiliza la tecnología para abordar la enseñanza y aprendizaje del TFC, además en ellas se puede evidenciar la evolución del TFC a lo largo de la historia y el proceso de formación que ha tenido hasta hoy, considerado como un objeto matemático de estudio, lo cual se puede observar en los trabajos de Grande (2013) y Scucuglia (2006).

Los trabajos de Grande (2013) y Robles et al (2014) muestran que el uso de la noción de acumulación permitió a los investigadores diseñar situaciones contextualizadas, con lo cual se pudo obtener un significado a la expresión $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, el volumen acumulado en un recipiente y el espacio recorrido por un móvil. Las actividades diseñadas por estos investigadores permitieron articular las representaciones gráficas, algebraicas y numéricas en las cuales las herramientas tecnológicas fueron de gran apoyo en la formación de conjeturas, además de ser un acelerador de tratamientos, cálculos y gráficos, y de mejorar la visualización, en el sentido de observar propiedades en las representaciones graficas presentadas.

Respecto a la investigación de Scucuglia (2006), no plantea actividades contextualizadas como los otros trabajos, debido a que sus actividades están enfocadas a probar el TFC con la intención de generalizar dicho resultado para toda clase funciones continuas.

Las investigaciones de Grande (2013), Scucuglia (2006) y Robles et al (2014) evidencian que las herramientas tecnológicas permiten coordinar diversas

representaciones como la gráfica, algebraica y tabular, lo cual es de gran ayuda para la formación de conjeturas relacionadas al TFC.

En cuanto a las dificultades que presentan los estudiantes al abordar el TFC son diversas, Grande (2013) afirma que no tener conceptos sólidos de función, evita que los estudiantes interpreten la siguiente expresión $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ y peor aún que estos realicen ciertas operaciones relacionadas con tal expresión, por ello en las operaciones se manifiestan muchos cálculos repetitivos lo cual se debe a la excesiva algebrización. Además, el investigador señala que no abordar el TFC de manera geométrica ocasiona en los estudiantes la creencia de que la integral sólo sirve para calcular áreas, lo cual ocasiona que se pierda una oportunidad de generar en los estudiantes nuevos conocimientos referentes a la integral y las derivadas.

Debido a las dificultades mencionadas anteriormente, los investigadores recomiendan que para superar estas dificultades se deben emplear herramientas tecnológicas como las calculadoras Scucuglia (2006) y software Robles *et al.* (2014), y buscar otras interpretaciones a la integral definida como la acumulación que plantea Grande (2013); estos son medios que permitirán a los estudiantes interpretar gráficamente el TFC, construir conjeturas para mejorar la comprensión de los aspectos conceptuales del TFC, además de ayudar a la articulación con otros temas de cálculo como la derivada, la integral, los límites y las funciones.

Conclusiones

El análisis de las investigaciones utilizando el criterio el uso de tecnologías nos permitió tener un panorama de la manera de abordar la enseñanza y aprendizaje del TFC, pudiendo observar que los investigadores recomiendan emplear situaciones contextualizadas en las cuales la integral definida adquiere un significado diferente al tradicional, el área bajo la curva.

Las investigaciones analizadas muestran que abordar la enseñanza y aprendizaje del TFC es diferente, esto es, Scucuglia (2006) diseñó sus actividades con la finalidad de que los estudiantes demuestren el TFC, a diferencia de los otros investigadores cuya finalidad era la exploración del TFC.

La noción de acumulación permitió contextualizar las actividades, también permitió a los estudiantes articular los procesos de derivación e integración además, de emplear sus

conocimientos de función y razón de cambio. Esto se pudo observar en las investigaciones de Grande (2013) y Robles et al (2014).

En las investigaciones de Grande (2013) y Robles et al (2014) el concepto de acumulación resultó un elemento clave para la comprensión y manipulación de la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Además, este concepto resultó de mucha ayuda para que los estudiantes se desprendan de la interpretación geométrica de la integral definida como área bajo la curva.

El uso del GeoGebra, el Applet Descartes y las calculadoras facilitaron la exploración de las actividades planteadas por los investigadores además de promover la conjetura, la identificación de patrones y la coordinación de representaciones algebraica, gráfica y tabular.

Agradecimientos

Agradecemos a la Pontificia Universidad Católica del Perú – PUCP, Escuela de Posgrado – Maestría Enseñanza de las Matemáticas, específicamente a la línea investigación *Tecnologías y Visualización en Educación Matemática – TecVEM*, por el apoyo brindado para concretizar la presente investigación.

Referencias

- FIorentini, D.; Lorenzato, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos técnicos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2006.
- GRANDE, A. **Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino**. Tesis doctoral en Educación Matemática, Pontificia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.
- GOMEZ, M.; GALEANO, C.; JARAMILLO, D. El estado del arte: una metodología de investigación. **Revista Colombiana de Ciencias Sociales**, v. 6 n. 2, p. 423-442, 2015..
- ROBLES, M. G.; TELLECHEA, E.; FONT, V. Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo. **Educación matemática**, v. 26, n. 2, p. 69-109, 2014. Disponible en < <http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v26n2/v26n2a3.pdf>>. Acceso em: 05 may. 2018.
- SCUCUGLIA, R. **A investigação do teorema fundamental do cálculo com calculadoras gráficas**. Dissertação de mestrado en Educación Matemática, Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2006.