

Um levantamento das pesquisas que tratam a bissetriz como lugar geométrico

AMANDA CORREIA TEIXEIRA PEREIRA¹

MARIA JOSÉ FERREIRA DA SILVA²

Resumo

Este artigo apresenta uma pesquisa bibliográfica que tem como objetivo apresentar um panorama das investigações realizadas a respeito de Bissetriz. Após realizar o levantamento das pesquisas no Banco de Teses e Dissertações da CAPES a partir de 2009, verificamos que não há trabalhos que tratem especificamente do tema. Realizamos então outra consulta com as palavras chaves: construções geométricas bissetriz e obtivemos 13 trabalhos, todos de mestrado profissional ou do Profmat. Para analisar esses trabalhos utilizamos os seguintes critérios: observar a abordagem dada pelo pesquisador para a bissetriz, identificar o referencial teórico utilizado, além dos sujeitos das pesquisas. Os resultados nos mostram que apenas uma pesquisa aborda e explora a noção de lugar geométrico em atividades em que a Bissetriz é a solução das tarefas apresentadas. Verificamos então com esse levantamento a necessidade de mais pesquisas que estudem o objeto matemático considerando a noção de lugar geométrico.

Palavras-chave: Geometria; Bissetriz; Lugar Geométrico.

Abstract

This article presents a bibliographic research that aims to present an overview of the investigations already performed regarding the Bisector. After surveying the research in the CAPES Bank of Theses and Dissertations from 2009, we found that there were no papers that specifically addressed the topic. We then made another query with the key words: bisector geometric constructions and we obtained 13 works, all professional master or Profmat. We used as criteria of analysis: observe the approach given by the researcher to the bisector, identify the theoretical framework used, and the research subjects. The results show us that only 1 research addresses and explores the notion of geometric place with activities in which Bisector is the solution of the presented tasks. We then verified with this data survey the need for more research that study the mathematical object considering the notion of geometric place.

Keywords: Geometry; Bisector; Geometric place.

Introdução

O ensino de geometria permite aos alunos um tipo de pensamento para compreender, descrever e representar de forma organizada o mundo, que de acordo com a BNCC (2017) é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir

¹ Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PEPG em Educação Matemática – e-mail: amanda.teixeira.pereira@gmail.com.

² Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PEPG em Educação Matemática – e-mail: zeze@pucsp.br.

argumentos geométricos convincentes. Para Fassio (2011), “o estudo da geometria ajuda os alunos a representarem e darem significado ao mundo, através das relações entre modelos geométricos criados e/ou manipulados, possibilitando a compreensão de representações abstratas”.

Na geometria o aluno desenvolve um pensamento particular para entender as propriedades geométricas intrínsecas que caracterizam cada objeto. Assim, é importante conhecer cada objeto da geometria por diferentes pontos de vista, como por exemplo, sua compreensão por meio de uma construção, ou seu lugar geométrico quando for o caso. A esse respeito Araújo (2010), afirma que:

uma figura geométrica se caracteriza por determinadas propriedades que a individualizam. Neste contexto, a concepção de lugar geométrico pode ser vista como “um conjunto de pontos que apresentam uma determinada propriedade: se um certo ponto possui a propriedade X, então ele pertence ao lugar geométrico dos pontos que satisfazem X”. (CAMARGO s/d apud ARAÚJO, 2010 p.26).

No caso do lugar geométrico, pesquisas indicam que os livros didáticos não a abordam e, portanto, não exploram seu significado, o que prejudica a aprendizagem de alguns conceitos geométricos. Nas publicações que tratam do assunto, de acordo com Almeida (2007, p. 89):

verifica-se que o termo e o seu significado não são devidamente explorados, o que se encontram são definições que expressam as propriedades destes lugares geométricos, constatando-se uma tendência a favorecer o seu aspecto construtivo e não o relacionamento da propriedade com o modelo geométrico (ALMEIDA, 2007 p.89).

Quanto aos recursos a régua e o compasso ainda são eficientes para a aprendizagem, mas no caso de lugar geométrico, permite apenas a determinação de alguns pontos, por outro lado, permite o desenvolvimento de coordenação motora fina diferente da permitida por um software de representação dinâmica, mas que em contrapartida permite a representação do lugar geométrico em continuidade. Para Gravina (2015, p. 238)

Com as tecnologias digitais, novas possibilidades de criação, produção e veiculação de conhecimento se descortinam – agora é a

possibilidade de interagir com sistemas dinâmicos de representação, que externalizam e internalizam novos pensamentos, em contínuo processo de ação/ reação entre sujeito e ferramenta.

Tratando das representações dinâmicas associadas a lugares geométricos Schumann e Green (1994, p. 108) afirmam que:

A construção interativa de lugares geométricos pode ser utilizada com eficácia nos seguintes aspectos do ensino da matemática: na fase heurística de construção de tarefas sobre a resolução de problemas; a verificação experimental dos resultados da construção: nos estudos sobre a posição e a forma da imagem de uma forma original transformada: na construção de seções cônicas e curvas algébricas; nos estudos sobre as formas dos lugares geométricos geradas pelo movimento de pontos especiais, num triângulo ou numa configuração mais complexa.

Tendo em vista nosso interesse em pesquisar o tema bissetriz com o enfoque de lugar geométrico utilizando software de representação dinâmica decidimos realizar um levantamento das pesquisas que tratam desse tema.

1 Metodología

Utilizamos, no âmbito das pesquisas qualitativas, uma pesquisa no nível exploratório que, de acordo com Gil (1999, p. 43), “tem como principal finalidade desenvolver, esclarecer e modificar conceitos e ideias, tendo em vista, a formulação de problemas mais precisos ou hipóteses pesquisáveis para estudos posteriores” e se delinea como uma pesquisa bibliográfica porque se desenvolve “a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos”(p. 63). Para Fiorentini e Lorenzato (2012, p.70) as pesquisas de caráter bibliográfico ou de revisão pertencem à modalidade de estudo: “que se propõe a realizar análises históricas e/ou revisão de estudos ou processos tendo como material de análise documentos escritos e/ou produções culturais garimpados a partir de arquivos e acervos.” Nesse sentido, Romanowski e Ens (2006, p. 39) afirmam que as análises possibilitam:

examinar as ênfases e temas abordados nas pesquisas; os referenciais teóricos que subsidiaram as investigações; a relação entre o pesquisador e a prática pedagógica; as sugestões e proposições apresentadas pelos pesquisadores; as contribuições da pesquisa para

mudança e inovações da prática pedagógica; a contribuição na definição de tendências.

Assim, buscamos no Banco de Teses e Dissertações da CAPES trabalhos acadêmicos produzidos a partir de 2009 (últimos dez anos) e como não encontramos nenhum trabalho que tratasse especificamente de Bissetriz, que é o nosso objeto de pesquisa, fizemos nova busca com as seguintes palavras chaves: construções geométricas bissetriz que resultou em 19 trabalhos.

2 Apresentação e análise dos trabalhos

Todos os trabalhos encontrados eram de mestrado e abordavam a bissetriz juntamente com outros objetos matemáticos. No entanto, seis deles focavam nosso tema mas não justificavam matematicamente as atividades apresentadas e decidimos, então, excluí-los de nossa análise, resultando assim 13 trabalhos para estudo. Outro ponto relevante de nosso levantamento é que esses trabalhos se enquadram como Mestrado Profissional ou PROFMAT, ou seja, não encontramos nenhum mestrado strictu sensu.

Quadro 1: Instituições e Tipos de Mestrado

Autor	Ano	Título	Instituição	Mestrado
Araújo, P. B.	2010	Situações de aprendizagem: a circunferência, a mediatriz e uma abordagem com o Geogebra.	PUC/SP	Profissional
Fassio, S. A. O.	2011	Da cartolina ao computador: uma proposta para o estudo de geometria.	UNESP/SP	Profissional
Souza, R. D.	2013	O resgate do ensino das construções geométricas na educação básica.	UESC/BA	PROFMAT
Silva, A. G.	2013	Construções geométricas com régua e compasso.	UFAL/AL	PROFMAT
Corrêa Jr, O. J.	2014	Construções geométricas com foco no método dos lugares geométricos: aspectos teóricos e computacionais.	UFTM/MG	PROFMAT
Oliveira, L. M. S.	2015	Ensinando geometria com régua e compasso, uma proposta para o 8º ano.	UENF/RJ	PROFMAT
Marca, A.	2015	Construções geométricas como recurso pedagógico no ensino médio.	UTFPR/PR	PROFMAT
Giroto, N.	2016	O desenvolvimento de hábitos de pensamento: um estudo de caso a partir de construções geométricas no Geogebra.	UFRGS/RS	Profissional
Bonfim, M.	2016	Construções geométricas e origami.	UFABC/SP	PROFMAT
Lied, R.	2016	Construções com régua e compasso envolvendo lugares geométricos: uma proposta dinâmica aliada a Teoria de Registros de Representação Semiótica.	UFSM/RS	Profissional
Alves, A. R.	2017	O desenho geométrico no 9º ano como estratégia didática no ensino da geometria.	UFAL/AL	PROFMAT
Lima, F. E.	2018	Construções geométricas com o auxílio de régua e compasso do software Geogebra.	UESC/BA	PROFMAT
Silva, H. J. O.	2018	Construções geométricas com régua e compasso e dobradura.	UFV/MG	PROFMAT

Fonte: Produção dos autores

No quadro 1 apresentamos os autores, ano de defesa, título, instituição e tipo de mestrado de nosso corpus de análise e nele, podemos observar que tratando a bissetriz relacionada a construções geométricas, o PROFMAT foi o que mais produziu nos últimos dez anos.

Os critérios de análise das pesquisas foram: buscar a abordagem dada pelo pesquisador para o objeto matemático, identificar o referencial teórico utilizado, além dos sujeitos das pesquisas.

3 Abordagem dada à bissetriz

Quanto ao primeiro critério focamos em observar se, em algum ponto, tratava a bissetriz como lugar geométrico ou não, neste caso identificar a abordagem dada pelo autor. Pudemos observar, no Quadro 2, que apenas cinco dos 13 trabalhos abordaram a bissetriz enquanto lugar geométrico, os demais apresentaram a construção ou a construção e justificativa pela congruência de triângulos, conforme a tabela abaixo.

Quadro 2: Abordagem dada à Bissetriz

Autor (es)	Abordagem da Bissetriz
Araújo, P. B. (2010)	lugar geométrico
Lied, R. (2016)	lugar geométrico
Marca, A. (2015)	lugar geométrico
Corrêa Júnior, O. J (2014)	lugar geométrico
Silva, H. J. O. (2018)	lugar geométrico
Bonfim, M. (2016)	lugar geométrico
Silva, A. G. (2013)	construção geométrica
Oliveira, L. M. S. (2015)	construção geométrica
Souza, R. D. (2013)	construção geométrica e justificativa pelo caso LLL
Lima, F. E. (2018)	construção geométrica e justificativa pelo caso LLL
Giroto, N. (2016)	construção geométrica e justificativa pelo caso LLL
Fassio, S. A. O. (2011)	construção geométrica e justificativa pelo caso LLL
Alves, A. R. (2017)	construção geométrica e justificativa pelo caso LLL

Fonte: Produção dos autores

Dos seis trabalhos com abordagem de lugar geométrico observamos que Lied (2016) foi a única pesquisadora que abordou o objeto matemático bissetriz como lugar geométrico buscando favorecer a relação entre a propriedade (o lugar geométrico dos pontos que equidistam de duas retas concorrentes dadas) e o modelo geométrico de acordo com Almeida (2007). A pesquisadora elaborou uma sequência didática, envolvendo os lugares geométricos circunferência, reta mediatriz e bissetriz em que as atividades não se limitaram apenas nas construções desses conhecimentos, mas foram explorados

problemas em contextos matemáticos em que os alunos precisavam mobilizar a noção de “lugar geométrico” para a resolução. A autora escolheu ainda explorar essas atividades com papel, lápis, régua e compasso, além do Software Geogebra.

Araújo (2010) escolheu como tema de sua pesquisa os objetos circunferência e mediatriz em uma abordagem com o Geogebra em atividades que envolviam situações do cotidiano, em que os alunos precisavam mobilizar a noção de “lugar geométrico” para a resolução. Apesar da bissetriz não ser o objeto de estudo do autor, ele critica sua abordagem nos livros didáticos por apresentarem a construção por dobradura ou a construção geométrica simplificada. Assim, elabora uma construção para a bissetriz justificada por meio de congruência de triângulos e apresenta a definição: “bissetriz é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de duas retas concorrentes”. Em suas conclusões, o autor sugere que novas pesquisas sejam realizadas com outros lugares geométricos, como por exemplo, o arco-capaz, retas paralelas, sólidos geométricos, áreas, estudo de curvas e movimento de pontos.

Marca (2015) realizou um trabalho de construções geométricas com régua e compasso e, dentre as muitas construções realizadas, abordou a construção da bissetriz e a justificou por congruência de triângulos definindo-a como “o lugar geométrico dos pontos equidistantes de duas retas”, no entanto não apresentou atividades que explorassem tanto a construção, quanto a definição.

Corrêa Júnior (2014) contempla em sua pesquisa um breve estudo do método de lugares geométricos utilizando régua e compasso e o software Geogebra para construir representações para os objetos: circunferência, mediatriz, par de retas paralelas, bissetrizes e arcos capazes. Para a bissetriz apresentou e demonstrou dois teoremas recíprocos: 1ª Hipótese: Se P pertence ao LG (bissetriz); Tese: Então p equidista de r e s . 2ª Hipótese: Se P equidista de r e s ; Tese: Então P pertence a Bissetriz do ângulo determinados por r e s . Assim, adotou a definição: “é o lugar geométrico dos pontos P , de um plano, equidistantes de duas retas concorrentes r e s desse plano”. Após apresentar alguns exemplos para aplicação dentro da própria Matemática, abordou uma situação cotidiana em que a solução é obtida a partir da bissetriz.

Bonfim (2016) realiza um trabalho a respeito de construções geométricas (com régua e compasso) e Origami afirmando que este é fundamentado em conhecimentos básicos de Geometria como ângulos, planos, retas e pontos. Apresenta os Axiomas de Huzita-Hatori, a triseção do ângulo e a duplicação do cubo, além da construtibilidade de

determinados números usando régua e compasso. A construção da Bissetriz é realizada, mas o autor apenas descreve a justificativa por congruência de triângulos e define a bissetriz de um ângulo como o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam dos lados do ângulo, porém não explora o lugar geométrico, nem o conjunto de pontos pertencentes a este lugar, tão pouco aborda atividades em que a bissetriz seja a solução.

Tratando ainda de construções geométricas com régua e compasso, Silva (2018) embora apresente a impossibilidade dos problemas clássicos dos gregos, como a trissecção de um ângulo e a duplicação do cubo opta em seu trabalho pela dobradura dos Axiomas de Huzita-Hatori e por construções geométricas. Segundo o autor, esse tipo de atividade desperta o interesse dos alunos e não necessita de instrumentos específicos. A construção da Bissetriz é justificada por congruência de triângulos e, embora defina bissetriz como “lugar geométrico dos pontos equidistantes dos lados de um ângulo” e, utilize definições relacionadas a noção de lugar geométrico também para a mediatriz e o arco capaz, não a explorou, pois não tratou de apresentar atividades em que a construção da Bissetriz fosse a resposta do problema. De acordo com Almeida (2007) pode-se constatar nesses trabalhos uma tendência que favorece apenas o aspecto construtivo e não o relacionamento de propriedades com o modelo geométrico.

Quanto aos outros trabalhos observamos que todos apresentam a mesma definição: “a bissetriz de um ângulo é a reta que passa pelo vértice do ângulo dado, e que o divide ao meio” focando nas construções e não em uma reflexão a respeito das propriedades geométricas intrínsecas a essas construções. A esse respeito Araújo (2010, p.26) afirma que “entender as propriedades geométricas que estão atreladas a uma determinada figura e como elas se relacionam pode possibilitar um entendimento de conceitos geométricos como a circunferência, mediatriz, bissetriz e outros”.

4 Referencial teórico

Utilizamos o critério referencial teórico utilizado nos trabalhos analisados para verificar se existe algum referencial teórico privilegiado quando o tema é geometria. No Quadro 3 apresentamos os resultados encontrados. Como podemos observar dos 13 trabalhos analisados sete não mencionam qualquer referencial teórico. Inferimos que essa ocorrência se deve ao fato de se tratarem de mestrandos profissionais que tem foco na construção de um produto e não na realização de uma pesquisa.

Quadro 3: Referencial teórico

Autor (es)	Referencial teórico
Araújo, P. B. (2010)	Teoria das Situações Didáticas
Fassio, S. A. O. (2011)	Sem referencial teórico
Souza, R. D. (2013)	Sem referencial teórico
Silva, A. G. (2013)	Sem referencial teórico
Corrêa Jr, O. J. (2014)	Sem referencial teórico
Marca, A. (2015)	Análise de Conteúdo
Oliveira, L. M. S. (2015)	Níveis de Pensamento Geométrico
Lied, R. (2016)	Registros de Representação Semiótica
Giroto, N. (2016)	Hábitos de Pensamento Matemático
Bonfim, M. (2016)	Sem referencial teórico
Alves, A. R. (2017)	Níveis de Pensamento Geométrico
Silva, H. J. O. (2018)	Sem referencial teórico
Lima, F. E. (2018)	Sem referencial teórico

Fonte: Produção dos autores

Do restante dos trabalhos três se basearam nos Níveis de Pensamento Geométrico de Van Hiele, ou seja, esse foi o referencial teórico mais utilizado. É o caso de Oliveira (2015) que aplicou um teste em 32 estudantes de uma turma de 8º ano do ensino fundamental e constatou que 18 estavam no nível 0, um aluno atingiu o nível 1 e 13 estavam no nível N, ou seja, estavam abaixo do nível 0. Já Marca (2015) constatou que a maioria dos alunos, do 3º ano do ensino médio investigados, estavam no nível 2, mas que após participarem de uma oficina atingiram o nível 3. Tal avanço na compreensão dos alunos foi justificado pelo autor pelas construções geométricas realizadas. Alves (2017) concluiu, após realizar atividades de Desenho Geométrico com alunos do 9º ano do ensino fundamental, que de 15 alunos que se encontravam no nível zero, restaram apenas 6; antes das atividades eram 17 o número de alunos no nível 1, após a realização das atividades passaram a ser 23; 4 alunos estavam enquadrados no nível 2, após as atividades, esse número aumentou para 6 e ainda 1 aluno foi enquadrado no nível 3 (antes não haviam alunos nesse nível). Sendo assim, a autora entende que os objetivos da pesquisa foram alcançados.

Araujo (2010) utilizou como referencial teórico a Teoria das Situações Didáticas. Foi realizada uma atividade diagnóstica para avaliar a compreensão dos alunos sobre circunferência, mediatriz e lugares geométricos. A maioria dos alunos tinham conhecimento sobre circunferência, mas não sabiam sobre lugares geométricos e mediatriz. Foram aplicadas situações didáticas (com régua e compasso, software Geogebra), em que inicialmente os alunos faziam a leitura e interpretação do enunciado, analisando a questão e criando estratégias (ação). Em seguida, os grupos desenvolviam

as estratégias criadas por eles, levantando e explicitando procedimentos e possíveis soluções (formulação). Após, os grupos tentavam convencer os demais e o professor de que seus argumentos estavam corretos (validação). Por fim, a partir dos argumentos levantados, o professor organizava as conclusões (institucionalização). O autor ressaltou a importância do software Geogebra na consolidação das aprendizagens a respeito de lugar geométrico, os estudantes puderam experimentar suas hipóteses, conjecturar sobre diferentes possibilidades de resolução e ao perceberem um erro, fazerem retroações, questionando, reconstruindo e obtendo resultados satisfatórios.

Giroto (2016) utilizou como referencial teórico os Hábitos de Pensamento Matemático de Goldenberg que o conduziram a concluir que os alunos permaneceram no nível do conhecimento empírico, mas que estavam preparados para um trabalho com argumentações dedutivas.

Lied (2016) utilizou a teoria dos Registros de Representação Semiótica para investigar a mobilização de diferentes registros e as apreensões (perceptiva, operatória, sequencial e discursiva) de figuras em alunos da Licenciatura em Matemática. A autora constatou que a apreensão perceptiva esteve presente em todas as etapas das atividades e, dependendo da atividade, a apreensão sequencial. A apreensão discursiva não ocorreu como esperado porque ocorreram erros na interpretação de alguns enunciados e os alunos procuravam justificar ou apresentar as etapas de solução das atividades apenas no registro da língua natural. A apreensão operatória foi essencial em algumas atividades, principalmente, para a compreensão da propriedade que estava sendo abordada. A autora entende que a pesquisa permitiu a construção de novos conhecimentos a respeito das potencialidades do Geogebra e das construções que tratavam de lugares geométricos.

5 Sujeitos

Quanto ao critério sujeitos, elaboramos o Quadro 4 para identificar os sujeitos de investigação de acordo com o nível de ensino, mesmo para aqueles trabalhos que elaboraram uma sequência, mas não aplicaram, além daqueles que não tratam de qualquer sujeito. Podemos ver no Quadro 4 que dos 13 trabalhos analisados sete tinham como sujeitos alunos do ensino fundamental II, pois é neste nível que está programado o ensino de bissetriz, dois focaram em alunos do ensino médio e apenas um tratou da formação inicial de professores de Matemática.

Quadro 4: Sujeitos

Autor (es)	Sujeitos
Araújo, P. B. (2010)	alunos do 9º ano do ensino fundamental e 2º ano do ensino médio
Fassio, S. A. O. (2011)	alunos do 8º e 9º anos do ensino fundamental
Oliveira, L. M. S. (2015)	alunos do 8º ano do ensino fundamental
Marca, A. (2015)	alunos do 3º ano do ensino médio
Giroto, N. (2016)	alunos do 9º ano do ensino fundamental
Lied, R. (2016)	alunos da graduação em Matemática
Alves, A. R. (2017)	alunos do 9º ano do ensino fundamental
Silva, H. J. O. (2018)	alunos do 7º ano do ensino fundamental
Lima, F. E. (2018)	alunos do EJA IV (6º e 7º ano do ensino fundamental)
Silva, A. G. (2013)	sem sujeitos
Souza, R. D. (2013)	sem sujeitos
Corrêa Jr, O. J. (2014)	sem sujeitos
Bonfim, M. (2016)	sem sujeitos

Fonte: Produção dos autores

Dos sete trabalhos focados no Ensino Fundamental, Silva (2018) aplicou atividades de desenho geométrico para alunos do 7º ano de uma escola municipal em Minas Gerais, propondo a construção de mediatriz, bissetriz e arco capaz. Concluiu que, tanto as construções com régua e compasso, como a dobradura em papel, auxiliaram na aprendizagem de geometria e, ainda, que os alunos perceberam a importância dos procedimentos matemáticos na resolução de problemas.

Já Oliveira (2015) elaborou uma sequência de atividades que foi aplicada em 32 alunos do 8º ano do ensino fundamental para ensinar retas paralelas, retas perpendiculares, bissetriz e mediatriz. O autor fez um pré-teste, mas mesmo não tendo aplicado um pós-teste entendeu que seus objetivos foram alcançados, pois os alunos participaram ativamente das aulas e tiveram uma aprendizagem significativa de paralelas, perpendiculares, bissetrizes, ponto médio e mediatrizes.

Realizando uma sequência didática para ensinar retas paralelas, retas perpendiculares, triângulos, quadrados, quadriláteros, círculos, polígonos e a construção da composição de vários polígonos a alunos de 9º ano de uma escola do município de Porto Alegre, Giroto (2016) observou que os alunos replicavam as construções geométricas sem perceber propriedades inerentes às figuras geométricas. Ainda tendo como sujeito alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, mas agora de uma escola estadual de Alagoas, Alves (2017) elaborou e aplicou uma sequência didática que tratava de construções

geométricas realizadas com régua e compasso para retas paralelas, retas perpendiculares, mediatriz, bissetriz, divisão de segmento, triângulos e pontos notáveis de um triângulo. Para a autora, a realização das atividades de construções permitiram aos alunos a compreensão dos conceitos e propriedades das figuras geométricas consideradas.

Araújo (2010) aplicou uma sequência para alunos do 9º ano do ensino fundamental e do 2º ano do ensino médio que focava na resolução de problemas do cotidiano que envolviam conhecimentos de mediatriz e circunferência, além de atividades que envolviam especificamente construções geométricas mediadas pelo *software* Geogebra. Para o autor o software permitiu aos estudantes desenvolverem autonomia para experimentar e validar suas conjecturas, além da compreensão de circunferência e mediatriz como lugares geométricos a partir de atividades de simulação sem uso do compasso. Embora não tenha realizado as atividades com a bissetriz, fez críticas relacionadas a sua abordagem em um livro didático e ao final da dissertação sugere seu estudo em pesquisas futuras.

Fassio (2011) realizou a pesquisa com alunos de 7ª e 8ª série do ensino fundamental (atuais 8º e 9º ano) em um projeto que aborda a tecnologia e materiais manipuláveis para o ensino de Geometria no ensino fundamental. Foram utilizados diferentes recursos como cartolina, lápis, régua, caleidoscópio, esquadro, compasso, software e portasegmento para ensinar transporte de segmento, transporte de ângulos, bissetriz, retas perpendiculares, mediatriz, retas paralelas, reta tangente a circunferência e pontos notáveis de um triângulo. A pesquisadora entendeu que a sequência de construções aplicadas, a maneira como foram abordados os conteúdos e os materiais manipulativos utilizados, facilitaram a aprendizagem e as investigações matemáticas o que permitiu que inferisse que os conceitos estudados foram compreendidos.

Marca (2015) propôs uma oficina de atividades para alunos da 3ª série do ensino médio de uma escola de educação básica de Santa Catarina focando na construção da mediatriz, operações com segmentos de reta, transporte de um ângulo, construção de bissetriz, construção de retas paralelas, divisão de um segmento em partes congruentes, construção de um triângulo equilátero, construção de um triângulo com os comprimentos dos lados dados, pontos notáveis de um triângulo, circunferências inscritas e circunscritas em polígonos regulares. Para a autora as atividades propostas ajudaram os alunos na compreensão, elevando o nível de pensamento geométrico.

Lima (2018) apresentou uma proposta de sequência didática para o ensino de construções geométricas para alunos do EJA IV (Educação de Jovens e Adultos) que correspondem ao 6º e 7º ano do ensino fundamental de uma escola municipal de Arembepe em Salvador. Embora tenha utilizado, como recurso o software Geogebra, os alunos apresentaram dificuldades para produzir argumentos matemáticos ou raciocínio lógico para a realização das construções. No entanto para o autor a comparação dos resultados das atividades propostas incentivaram o começo de uma cultura de aprendizagem significativa, dinâmica e crítica.

Lied (2016) propôs uma sequência para oito alunos de graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Maria, ou seja, em formação inicial de professores. As atividades foram exploradas com régua e compasso e com o *software* Geogebra e envolviam os lugares geométricos mediatriz, circunferência e bissetriz. O objetivo da pesquisa foi investigar a mobilização de Registros de Representação Semiótica. As atividades foram constituídas afim de que os sujeitos pudessem realizar tratamentos e conversões dos diferentes registros: figural, algébrico, simbólico e língua natural. Por meio das análises a autora percebeu que o registro da língua natural foi predominante nas resoluções e o registro algébrico não foi mobilizado, mesmo quando eram solicitadas as justificativas algébricas. A autora ressaltou a importância de aliar a Teoria de Registros de Representação Semiótica e o uso do software Geogebra na elaboração da sequência e na análise dos resultados e concluiu que as atividades possibilitaram aos alunos a identificação das características e propriedades dos lugares geométricos abordados.

Neste critério podemos ver que várias pesquisas tratam determinados conteúdos fora da faixa etária apropriada ou prevista pelo currículo, como é o caso, por exemplo, do trabalho com alunos do ensino médio e mesmo na licenciatura. Como são mestrandos profissionais inferimos que buscavam corrigir falhas do ensino anterior. Vimos também que faltam pesquisas que tratem, por exemplo, da formação inicial ou continuada de professores no sentido de discutir os melhores caminhos para ensinar construções geométricas e os conteúdos de geometria a elas associadas.

Considerações Finais

Considerando o panorama pesquisado, nos últimos 10 anos, não encontramos qualquer

trabalho em que a bissetriz fosse estudada como protagonista, apenas Lied (2016) apresenta e aplica uma sequência de ensino com atividades que exploraram a Bissetriz como lugar geométrico. Há carência de pesquisas que tratem de bissetriz como lugar geométrico e de suas propriedades, além do trabalho com atividades em que elas sejam essenciais para a solução.

Outro ponto a ser observado é que muitas pesquisas não se apoiam em qualquer fundamentação teórica para a elaboração e aplicação das sequências de ensinos, mas baseiam-se apenas na prática. Tal fato pode ser entendido por tratar-se de mestrados profissionais que focam na construção de um produto para ser utilizado por professores, o que faz com que o foco seja um problema do professor e não um problema didático. Tal argumento justifica ainda o trabalho realizado com conteúdos que já deveriam ser dominados pelos alunos, ou seja, fora da faixa etária que deveriam ser ensinados.

Não encontramos pesquisas de formação de professores, tanto inicial, quanto continuada, no sentido de levantar discussões a respeito da melhor maneira de conduzir os alunos a aprenderem geometria, em particular, os lugares geométricos.

Referências

ALMEIDA, I. A. C. **Identificando rupturas entre significados e significantes nas construções geométricas.** Um estudo em traçados de lugares geométricos bidimensionais, envolvendo pontos, retas e circunferências. 2007. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007.

ALVES, A. R. **O desenho geométrico no 9º ano como estratégia didática no ensino da geometria.** 2017. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2017.

ARAÚJO, P. B. **Situações de aprendizagem: a circunferência, a mediatriz e uma abordagem com o Geogebra.** 2010. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

BONFIM, M. **Construções geométricas e origami.** 2016. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Centro de Matemática, Computação e Cognição, Universidade Federal do ABC, Santo André, 2016.

BRASIL, Ministério da Educação Ensino Fundamental. **Base Nacional Comum Curricular: Matemática,** Brasília: 2017.

CORRÊA JÚNIOR, O.J. **Construções geométricas com foco no método dos lugares geométricos: aspectos teóricos e computacionais.** 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, 2014.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto.**

3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

FASSIO, S. A. O. **Da cartolina ao computador: uma proposta para o estudo de geometria**. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pós-Graduação em Educação Matemática – Área de Concentração: Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus fundamentos filosóficos-científicos, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2011.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática**. São Paulo: Autores Associados, 2012.

GIL, A.C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 1999.

GIROTTI, N. **O desenvolvimento de hábitos de pensamento: um estudo de caso a partir de construções geométricas no Geogebra**. 2016. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

GRAVINA, M. A. O potencial semiótico do Geogebra na aprendizagem da geometria: uma experiência ilustrativa. **Vidya**, v.35, n.2, p.237-253, 2015.

LIED, R. **Construções com régua e compasso envolvendo lugares geométricos: uma proposta dinâmica aliada a Teoria de Registros de Representação Semiótica**. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Área de concentração em Educação Matemática, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2016.

LIMA, F. E. **Construções geométricas com o auxílio de régua e compasso do software Geogebra**. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Departamento de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2018.

MARCA, A. **Construções geométricas como recurso pedagógico no ensino médio**. 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática) Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2015.

OLIVEIRA, L.M.S. **Ensinando geometria com régua e compasso, uma proposta para o 8º ano**. 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2015.

ROMANOWSKI, J.P.; ENS, R.T. **As pesquisas denominadas do tipo “Estado da Arte”**. *Diálogos Educacionais*. V.6. número 19. 2006. Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2006.

SCHUMANN, H.; GREEN, D. **Learning Geometry through interactive construction. In: Discovering Geometry with a computer – Using Cabri Géomètre**. Heinz Schumann and David Green. Ed. Chartwell-Bratt, 1994.

SILVA A.G. **Construções geométricas com régua e compasso**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2013.

SILVA, H. J. O. **Construções geométricas com régua e compasso e dobradura**. 2018. Dissertação (Magister Scientiae) – Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional

em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Viçosa, Minas Gerais, 2018.

SOUZA, R.D. O resgate do ensino das construções geométricas na educação básica. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2013.