http://dx.doi.org/10.23925/2238-8044.2020v9i2p2-11

Resolução de sistemas de equações lineares por um sujeito cego: um experimento com foco na exploração das variáveis de Coulange

ELEN GRACIELE MARTINS[1]

BARBARA LUTAIF BIANCHINI[2]

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar a resolução de dois problemas envolvendo sistemas de equações lineares por um sujeito cego do 9º ano do ensino fundamental II. A metodologia adotada para coleta e análise dos dados foi o Design Experiments. Utilizamos os estudos de Coulange sobre variáveis para nortear nossas análises. Segundo ela, é possível identificar 8 variáveis em problemas envolvendo sistemas de equações lineares. No experimento de ensino aplicado, destacamos duas variáveis: V4 que se refere ao domínio numérico de medida de grandezas desconhecidas: conjunto numérico dos naturais, inteiros, reais, entre outros (problema 1) e V6 que trata da natureza redundante ou contraditória das informações a respeito das grandezas desconhecidas (problema 2). Nosso sujeito participante da investigação resolveu, facilmente, os dois problemas algebricamente, porém houve dificuldade para determinar a resposta do problema 2, que envolvia informações contraditórias.

Palavras-chave*: Sistemas de equações lineares; sujeito cego; variáveis de Coulange.*

Abstract

The objective of this work is to present the resolution of two problems involving systems of linear equations by a blind subject in the 9th grade of elementary school. The methodology adopted for data collection and analysis was Design Experiments. We used Coulange's studies on variables to guide our analyzes. According to her, it is possible to identify 8 variables in problems involving systems of linear equations. In the applied teaching experiment, we highlight two variables: V4 which refers to the numerical domain of measurement of unknown quantities: numerical set of naturals, integers, reals, among others, (problem 1) and V6 that deals with the redundant or contradictory nature of the information regarding unknown quantities (problem 2). Our subject easily solved both problems algebraically, but it was difficult to determine the answer to problem 2, which involved contradictory information.

Keywords: *Systems of linear equations; blind subject; Coulange variables.*

Introdução

O trabalho com sistemas de equações lineares no Ensino Fundamental II constitui uma importante base para o ensino de álgebra linear no ensino médio e para muitos cursos de nível superior (COULANGE, 2000, p.12). Nossa pesquisa de doutorado desenvolvida pela primeira autora e orientada pela segunda envolve a relação de um aluno cego com

[1] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PEPG em Educação Matemática – e-mail: elengmartins@gmail.com.

[2] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PEPG em Educação Matemática – e-mail: barbaralb@gmail.com.

as representações desse conteúdo, escolha que partiu do nosso levantamento bibliográfico que evidenciou não existirem trabalhos acadêmicos que tivessem estudado o ensino ou a aprendizagem desse objeto matemático por pessoas cegas. Assim, assumimos como ponto de partida um breve estudo sobre a introdução da álgebra no contexto escolar.

Segundo Chevallard (1984, 1989, 1990 *apud* COULANGE 2000), a álgebra escolar é trabalhada com os alunos como uma generalização da aritmética partindo de um contexto numérico e utilizando as expressões algébricas para representar e manipular números desconhecidos, determinados por outros números, desta vez conhecidos, chamados dados. Desta forma, o trabalho desenvolvido se reduz à manipulação de expressões tornando o cálculo algébrico um prolongamento do cálculo aritmético.

Com base nesta conclusão de Chevallard e na busca de referenciais sobre este conteúdo, encontramos, dentre outras, as pesquisas de mestrado de Battaglioli (2008) e Goulart (2014) a pesquisa de doutorado de Coulange (2000).

Battaglioli (2008) analisou a abordagem do conteúdo sistemas lineares, apresentada em livros didáticos do Ensino Médio, fundamentando-se no referencial teórico dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (2003) acreditando na importância da conversão de registros de representações para a construção do conhecimento. Concluiu que o registro gráfico é timidamente explorado nos exercícios propostos e que o registro algébrico prevalece nessa abordagem. Apresentou ainda como resultado de seu trabalho a constatação de que a ênfase é dada aos algoritmos de resolução dos sistemas enquanto a análise dos resultados obtidos na resolução é pouco explorada.

Goulart (2014) elaborou uma intervenção de ensino na intenção de analisar as reações dos alunos do 8º ano do Ensino Fundamental diante do estudo de sistemas de equações do 1º grau por meio da resolução de problemas. Utilizou a resolução de problemas como uma estratégia de ensino. Considerou ainda, no desenvolvimento da sua intervenção, a capacidade de resolver problemas a partir de conhecimentos prévios, como uma habilidade básica do aluno.

Goulart (2014) concluiu ter sido possível contribuir para uma eficaz construção de conhecimento de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas por meio da metodologia de resolução de problemas, fato comprovado quando, em momentos posteriores às atividades aplicadas em sua pesquisa, os estudantes envolvidos conseguiram resolver diversas situações-problema para as quais a utilização de sistemas de equações se fazia necessária.

Para Coulange (2000), quando tratamos de sistemas de equações lineares, o ensino atual privilegia os métodos de resolução em detrimento à solução de problemas.

Em seu trabalho, Coulange (2000, p. 189) analisou oito tipos de variáveis associadas a um problema fundamental por ela apresentado: *"Sejam* n *objetos. A cada objeto* i *está associada uma grandeza desconhecida. Há informações correspondentes a* p *relações lineares entre essas grandezas desconhecidas e pede-se para encontrar algumas dessas grandezas desconhecidas".*

Utilizando-se de um exemplo escolhido a partir deste problema fundamental, Coulange (2000) apresentou alguns problemas na intenção de mostrar que para a geração destes existe uma diversidade de significações possíveis por meio de valores atribuídos às variáveis.

Decidimos ~~nos~~ focar nos resultados encontrados por Coulange (2000) que, em sua pesquisa de doutorado destacou dois pontos relevantes para a escolha do trabalho com sistemas de equações lineares:

> 1. O sistema de equações é a extensão da equação para um desconhecido e por isso, é o cerne da álgebra elementar ensinada no ensino fundamental e médio. Mas é também a ferramenta básica da álgebra linear, que é um dos pontos essenciais da educação matemática na maioria das instituições de ensino superior: pode-se considerar que ele tem um "futuro rico".
>
> 2. As equações fazem parte das práticas de modelagem matemática[3]. (COULANGE, 2000, p.12, Tradução nossa.)

Desta maneira, estudamos como as variáveis de Coulange (2000) podem ser evidenciadas nas estratégias de resolução de problemas envolvendo sistemas de equações lineares de um sujeito cego com o objetivo de responder a seguinte questão de

[3] No original: *Le système d'équations est le prolongement de l'équation à une inconnue et se trouve donc au cœur de l'algèbre élémentaire enseignée au collège et au lycée. Mais c'est aussi l'outil de base de l'algèbre linéaire qui est un des points essentiels de l'enseignement mathématique dans la majorité des institutions du supérieur: on peut considérer qu'il a un « avenir riche ». La mise en équations fait partie des pratiques de modélisation mathématique.* (COULANGE, 2000, p.12)

pesquisa:

Quais variáveis descritas por Coulange (2000) são destacadas por um sujeito cego ao resolver problemas envolvendo sistemas de equações lineares?

A metodologia escolhida para coleta e análise dos dados foi o *Design Experiments*. Nesta metodologia o pesquisador pode traçar um perfil específico de aprendizagem dos sujeitos envolvidos ao analisar todo o caminho percorrido durante o experimento (COBB *et al.*, 2003).

1 As variáveis de Coulange

A pesquisadora Lalina Coulange estudou em seu doutorado os sistemas de equações lineares e, a partir de um problema fundamental, descreveu oito variáveis a ele associadas.

> Sejam n objetos. A cada objeto i está associada uma grandeza desconhecida. Há informações correspondentes a p relações lineares entre essas grandezas desconhecidas e pede-se para encontrar algumas dessas grandezas desconhecidas. (COULANGE, 2000, p. 189)

Exemplo dado a partir do problema fundamental:

> Sejam duas pilhas de pedras
>
> x designa o número de pedras da primeira pilha
>
> y designa o número de pedras da segunda pilha
>
> A segunda pilha tem 19 pedras a mais que a primeira
>
> a) Dê uma escrita de y com a ajuda de x.
>
> b) Há 133 pedras ao todo. Escreva uma igualdade verificada por x e y.
>
> c) Encontre x e y.

A partir desse exemplo, Coulange (2000, p. 189-192) apresenta oito tipos de variáveis relacionadas ao problema fundamental:

V1) relação entre grandezas conhecidas ou supostamente conhecidas e incógnitas, podendo ser realizada a modelização algébrica.

V2) designação, implícita ou explícita, das grandezas desconhecidas ou não. As incógnitas do sistema podem ser explicitamente designadas por letras. No exemplo, as grandezas desconhecidas são designadas por *x* e *y*.

V3) as variáveis dizem respeito às informações sobre as grandezas desconhecidas e as equações às quais o problema se refere e que aparecem no enunciado, podendo ocorrer de a escrita das equações necessitar apenas de conhecimentos culturais ou naturalizados a respeito de relações, tais como: “vezes mais”, “a mais”, “a menos” entre outras.

V4) referem-se ao domínio numérico de medida de grandezas desconhecidas: conjunto numérico dos naturais, inteiros, reais, entre outros. Podem também tomar valores particulares, como o preço de um objeto (decimal positivo com dois algarismos depois da vírgula). No exemplo, o domínio numérico é o dos números naturais – quantidade de pedras das pilhas.

V5) tratam do número n de valores desconhecidos e do número p de relações lineares entre as grandezas desconhecidas (n, p).

V6) tratam da natureza redundante ou contraditória das informações a respeito das grandezas desconhecidas.

Para Coulange (2000), os valores dados a essas variáveis dos 5º e 6º tipos, determinam o grau e a possibilidade de resolução do sistema de equações lineares produzido a partir do enunciado. Como exemplo cita que se $n = p = k$ e as informações do enunciado não são redundantes e nem contraditórias, o enunciado trata de um sistema de k equações a k incógnitas que admite uma única solução. No exemplo, o problema seria representado por um sistema dois por dois e as informações são não contraditórias e não redundantes.

V7) refere-se às formas de relações lineares entre as grandezas desconhecidas conduzidas pelas informações do enunciado. Para a autora, em teoria, há uma infinidade de formas possíveis, porém, o interesse está na forma que cada equação tem após a tradução direta.

V8) refere-se aos valores dos coeficientes das equações escritas de acordo com o enunciado do problema. No exemplo dado, n = 2, S (1; 2) = 19 (diferença do número de pedras entre as pilhas) e Σ = 133 (soma das quantidades de pedras das duas pilhas). Assim, o sistema referente ao exemplo dado por Coulange (2000) seria:

$$\begin{cases} y = x + 19 \\ x + y = 133 \end{cases}$$

Considerando os estudos de Battaglioli (2008), Goulart (2014) e Coulange (2000) sobre sistemas de equações lineares e o destaque dado por estas pesquisadoras à falta de pesquisas de doutorado que estudem a resolução de problemas envolvendo esse conteúdo, apresentamos neste artigo dois problemas que fizeram parte de um experimento de ensino que compõe nossa tese de doutourado. Nosso estudou buscou destacar, nas estratégias de resolução dos problemas, as variáveis descritas por Coulange (2000).

2 Caracterização do sujeito da pesquisa

O sujeito de nossa pesquisa é um adolescente cego[4] de 14 anos de idade que cursa o 9º ano do ensino fundamental em um colégio particular de pequeno porte da grande São Paulo. Atribuímos ao nosso sujeito o pseudônimo "Túlio".

3 O experimento

Nosso objetivo é apresentar as estratégias de Túlio, do 9º ano, para resolver dois problemas envolvendo sistemas de equações lineares destacando as variáveis (V4 – Domínio numérico de medida de grandezas desconhecidas e V6 – Natureza redundante ou contraditória das informações a respeito das grandezas desconhecidas) descritas por Coulange (2000). Ressaltamos que estes problemas fazem parte de uma atividade proposta ao nosso sujeito e que este estudo faz parte de uma tese de doutorado, desenvolvida pela primeira autora e orientada pela segunda, que investiga a aprendizagem de matemática por pessoas cegas.

A seguir apresentamos os dois problemas e o protocolo da resolução de cada um deles. Os exercícios foram apresentados em Braille e quando solicitado por Túlio, a pesquisadora assumia o papel de ledora. As respostas dadas pelo sujeito foram registradas em áudio e posteriomente transcritas.

Problema 1: Uma pessoa compra 5 kg de café e 3 kg de açúcar por R$ 24,60. Sabemos que 2 kg de café custam tanto quanto 7 kg de açúcar. Qual é o preço do quilograma de café e do quilograma de açúcar?

Túlio leu o problema 2 vezes antes de falar como resolveria. Após a leitura do problema

[4] Destacamos que essa pesquisa possui autorização do Comitê de Ética em Pesquisa conforme orienta a Resolução CNS/MS nº466/12 e que o responsável por nosso sujeito assinou o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido autorizando sua participação voluntária na pesquisa.

disse que iria resolvê-lo usando um sistema de equações lineares. Perguntamos quais seriam as equações que comporiam o sistema em questão. Ele nos disse que usaria as letras *c* para representar o quilograma de café e a letra *a* para representar o quilograma de açúcar. Em seguida nos informou que a primeira equação seria 5c + 3a = 24,60 e que a segunda seria 2c = 7a.

Túlio foi narrando cada etapa da resolução do sistema. Chamou-nos atenção o fato dele não apresentar dificuldade para realizar as operações com números decimais.

Figura 1 - Protocolo do Problema 1

$$\begin{cases} 5c + 3a = 24{,}60 \\ 2c = 7a \end{cases}$$

$2c = 7a$

$c = (7a) \div 2$

$c = 3{,}5\,a$

Substituindo *c* por *3,5a* na primeira equação

$5(3{,}5a) + 3a = 24{,}60$

$17{,}5\,a + 3a = 24{,}60$

$20{,}5\,a = 24{,}60$

$a = (24{,}60) \div (20{,}5)$

$a = 1{,}20$

Substituindo *a* por 1,20 na segunda equação

$2c = 7a$

$2c = 7.\,(1{,}20)$

$2c = 8{,}40$

$c = 4{,}20$

Resposta: Um quilo de açúcar custa R$ 1,20 e um quilo de café custa R$ 4,20.

Fonte: dados da pesquisa

A partir das estratégias utilizadas por Túlio foi possível observar que ele estava resolvendo o sistema pelo método da substituição.

Com relação às variáveis do problema, destacamos a V4 (referem-se ao domínio numérico de medida de grandezas desconhecidas), pois Túlio não mostrou dificuldade sobre o domínio numérico, que neste caso, refere-se ao sistema monetário brasileiro.

Problema 2: Compramos pela primeira vez 3 kg de café e 5 kg de açúcar por 23 reais, uma segunda vez compramos 9 kg de café e 15 kg de açúcar por 65 reais. Qual é o preço do quilograma de café e do quilograma de açúcar?

Após a leitura do problema, Túlio perguntou se a resposta não seria a mesma do problema anterior, que também tinha como pergunta o valor do quilograma de café e de açúcar. Solicitamos que ele lesse novamente o problema e observasse que as informações são diferentes.

Figura 2 - Protocolo do Problema 2

$$\begin{cases} 3c + 5a = 23 \\ 9c + 15a = 65 \end{cases}$$

$5a = 23 – 3c$

$a = (23 – 3c) \div 5$

Substituindo a por $(23 – 3c) \div 5$ na segunda equação

$9c + 15 [(23 – 3c) \div 5] = 65$

$9c + (345 \div 5) – (45c \div 5) = 65$

$9c + 69 – 9c = 65$

$0 + 69 = 65$

Não tem resposta.

Fonte: dados da pesquisa

Assim como no problema anterior, Túlio decidiu atribuir a letra *c* para representar o quilograma de café a e letra *a* para representar o quilograma do açúcar. Ele leu o problema mais uma vez e não hesitou em falar as duas equações que representavam as informações dadas. Túlio narrou "9*c* + 69 – 9*c* = 65" indagou que havia algo errado na conta. Perguntamos a ele o que havia de errado, e a resposta dada foi:

-9c menos 9c vai ser zero! Ai fica estranho! Não vai ter nenhuma letra! Acho que eu errei alguma coisa.

Após essa observação, Túlio decidiu recomeçar a resolução do problema. Ele solicitou à pesquisadora que fosse confirmando se os passos que ele ia dando eram iguais os passos dados na primeira vez que ele tentou resolver o problema (Túlio foi avisado que a pesquisadora anotaria todas as resoluções realizadas). Conforme ele narrava a resolução, a pesquisadora confirmava que os passos utilizados eram os mesmos.

Ao chegar na mesma parte do problema, “9c + 69 – 9c = 65”, Túlio narra o próximo passo:

“- 0 + 69 = 65! Esse problema não tem resposta! Nunca fiz algo assim. E agora? A resposta do problema será que ele não tem resposta? Isso é estranho!” Agora não sei como isso acontece porque no outro (problema1), *eu tinha achado o preço das coisas.*

As informações do problema não são redundantes, mas são contraditórias porque as quantidades de produtos (açúcar e café) foram triplicadas na segunda equação, mas o valor pago não. Analisando a variável 6 (tratam da natureza redundante ou contraditória das informações a respeito das grandezas desconhecidas) de Coulange (2000) é possível perceber que o problema não tem solução.

Túlio disse que nunca havia resolvido um problema que não tivesse resposta. O comentário de Túlio nos permite dizer que ele esperava se deparar com situações que já tivessem sido apresentadas a ele em algum momento de sua vida escolar. A apresentação de problemas que não possuem solução é prevista no conteúdo programático do ensino fundamental. Não podemos afirmar que nunca foram apresentadas a ele situações similares. No entanto, a resposta dada por Túlio pode significar que esse tipo de problema não tenha sido apresentado de forma adequada, o que neste contexto podemos entender, de forma acessível, com explicações claras, textos em Braille e com metodologia voltada ao ensino de pessoas cegas.

Considerações Finais

Neste artigo apresentamos a resolução de dois problemas envolvendo sistemas de equações lineares por um sujeito cego. Utilizamos o estudo de Coulange (2000) sobre as variáveis que podem ser identificadas em problemas envolvendo sistemas de equações lineares para nortear nossas análises.

Os problemas escolhidos tinham o mesmo contexto, tratavam do preço de dois alimentos, açúcar e café. Túlio não mostrou dificuldade para resolver o Problema 1, optando pelo método da substituição. A variável destacada neste problema é a V4, que se refere ao domínio numérico das grandezas envolvidas. As informações do problema não são redundantes nem contraditórias, o que favoreceu sua resolução.

Para resolver o Problema 2 Túlio recorreu ao método da substituição, como no Problema 1, não apresentando dificuldade na resolução algébrica, porém, ao comparar os dados dos dois problemas, percebeu que não havia uma resposta numérica (resultado) para a situação proposta. Nosso sujeito afirmou que nunca havia resolvido um problema que não tivesse resposta (ele estava considerando a resposta como um número, um resultado, que neste caso seriam valores dos preços em reais). Túlio chegou à conclusão que não havia como responder numericamente o problema porque as informações eram contraditórias. No Problema 2 a variável em destaque é a V6 que trata da natureza redundante ou contraditória das informações a respeito das grandezas desconhecidas.

Coulange (2000) destacou em sua pesquisa que a resolução de problemas não tem sido o foco do trabalho com sistemas de equações lineares, sendo preterida pelo enfoque nas técnicas de resolução. As estratégias de resolução apresentadas por Túlio nos dois problemas corroboram para a conclusão de que ainda há o privilégio do trabalho com as técnicas de resolução de sistemas de equações lineares e que se faz necessária uma mudança metodológica ao se trabalhar com este conteúdo, sendo que as variáveis descritas por Coulange (2000) podem ser uma ferramenta útil nesse processo.

Agradecimentos

Agradecemos à Capes pela bolsa de estudos, fundamental para a realização de nossa pesquisa.

Referências

BATTAGLIOLI, C. S. M. **Sistemas lineares na segunda série do ensino médio**: um olhar sobre os livros didáticos. 2008, 101f. Dissertação de mestrado profissional em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2008.

COBB, P.; CONFREY, J.; diSESSA, A.; SCHAUBLE, L. Design Experiments in Education Research. **Educational Researcher**, v.32, n.1, 2003.

COULANGE, L. **Étude des pratiues du professeur du double point de vue écologique te économique**. Cas de lénseignement des systèmes d'équations et de la mise en équations en casse de troisièmes. Tese (doutorado). Universidad Joseph Fourrier, Grenoble I, 2000.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática**.** In: MACHADO, S.D.A. **Aprendizagem em Matemática**: Registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003.

GOULART, A. M. A. **A aprendizagem significativa de sistemas de equações de 1º grau por meio da resolução de problemas**. 2014, 141f. Dissertação de mestrado em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2014.