http://dx.doi.org/10.23925/2238-8044.2020v9i2p12-24

Uma proposta de articulação entre teoria e prática no estudo da integral definida

JANINE FREITAS MOTA[1]

CELINA APARECIDA ALMEIDA PEREIRA ABAR[2]

Resumo

Este trabalho é um recorte de uma tese de doutorado, em desenvolvimento, cujo objetivo é de desenvolver uma alternativa pedagógica e tecnologógica, que contemple aspectos do Pensamento Matemático Avançado, bem como, aplicações, aprimoramento do conhecimento e do significado da Integral Definida, em contextos intramatemáticos e extramatemáticos, em cursos de Matemática. Neste recorte, apresentamos o percurso de nossa investigação, abordando, inicialmente, os aspectos relacionados às dificuldades na aprendizagem do Cálculo Integral, em particular, da Integral Definida. Ainda, destacamos que a exploração de aplicações desse conteúdo, em distintas áreas, é considerada como uma possibilidade para o seu ensino e para sua aprendizagem. Aspectos teóricos, metodológicos e tecnológicos são apresentados, como orientadores do planejamento da estratégia pedagógica. É destacado um exemplo de aplicação teórico-prática, na perspectiva de melhorias na qualidade do ensino e da aprendizagem desse tópico.

Palavras-chave*: Integral Definida; Conexões Intramatemáticas; Conexões Extramatemáticas; Educação Matemática no Ensino Superior*.

Abstract

This work is an doctoral thesis excerpt, under development, whose objective is to construct a pedagogical and technological alternative that contemplates Advanced Mathematical Thinking aspects and applications, improvement of knowledge and the meaning of the Definite Integral, in intramathematical and extramathematical contexts, inside the mathematical programs. In this excerpt, it is presented the research way, initially approaching the aspects related to the learning disabilities in Integral Calculus, particularly Definite Integral. Still, it is emphasized that the exploitation of applications of this content, in different areas, is considered as a possibility for its teaching and learning. Theoretical, methodological and technological aspects are presented as guide of pedagogical strategy planning. An example of theoretical-practical application is highlighted, with a view to improving the quality of teaching and learning on this topic.

Keywords: *Definite Integral; Intramathematics Connections; Extramathematcal Connections; Mathematics Learning in Higher Education*.

Introdução

Nossa experiência profissional, como docente da disciplina de Cálculo, tem evidenciado

[1] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PEPG em Educação Matemática – e-mail: janinemota@gmail.com.

[2] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PEPG em Educação Matemática – e-mail: abarcaap@pucsp.br.

as dificuldades que os estudantes, geralmente, apresentam durante o desenvolvimento dessa disciplina. Alguns desses estudantes escolheram, no ensino superior, um curso da área de Ciências Exatas, por terem tido, no ensino básico, uma afinidade satisfatória com a Matemática básica. No entanto, chegam ao ensino superior e se deparam com resultados insuficientes na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, demonstrando dificuldades em conteúdos da Matemática elementar, o que se apresenta como um obstáculo para a aprendizagem de conteúdos da Matemática do ensino superior.

Esse fato é corroborado por Dreyfus e Eisenberg (1990), ao ressaltarem que isso se deve ao fato de o Cálculo constituir-se em um ramo da Matemática superior, que exige maior tempo aos estudos sobre problemas não triviais que, geralmente, estão presentes em seu processo de aprendizagem. Artigue (1998) assegura que a formalização dos conteúdos de Matemática, requerida dos estudantes universitários, obriga-os a romper com o trabalho algébrico ordinário e passar a reconstruir significados. Em outro estudo, Artigue (1991) abordou as dificuldades que surgem para os estudantes no curso introdutório de Cálculo, destacando que, no ensino tradicional da referida disciplina, tais dificuldades, geralmente, são resolvidas por meio de uma excessiva algebrização, especialmente quanto ao predomínio da manipulação de fórmulas.

Assim, o objetivo deste texto é apresentar o percurso de nossa investigação, que se encontra em andamento, abordando, inicialmente, a problemática relacionada aos processos de ensino e de aprendizagem da Integral Definida, no âmbito da Educação Matemática. Sintetizamos alguns trabalhos, centrados em nosso objeto de estudo, com vistas a nos apoiar na compreensão dos conhecimentos didático-matemáticos, pertinentes para desenvolvimento de uma proposta pedagógica e tecnológica para o estudo desse tópico. Ainda, apresentamos um exemplo de uma aplicação, que pode ser usada como instrução matemática para o ensino e a aprendizagem da Integral Definida, nos contextos intramatemático e extramatemático.

1 Ensino e Aprendizagem da Integral Definida

González-Martín (2006) exibe em sua pesquisa alguns apontamentos sobre as dificuldades de aprendizagem da Integral, a qual é um tópico de estudo do Cálculo, que se concebe como uma ferramenta transdisciplinar, útil na resolução de problemas que descrevem aspectos da realidade. Esse autor destaca que um dos trabalhos pioneiros na aprendizagem do conceito de Integral Definida é o de Orton (1983), em que um dos seus objetivos se referia a investigar a compreensão dos alunos sobre integração e diferenciação. Nesse trabalho, os resultados são evidenciados pelo domínio do modo algébrico, em detrimento do modo gráfico e algumas deficiências de significado em limites e aproximações. González-Martín (2006, p. 20) ainda destaca que: “parece claro que a introdução da integração é obscurecida, para muitos estudantes, pela manipulação algébrica” *(tradução nossa)*.

De forma específica, nos materiais bibliográficos, referentes ao Cálculo Integral, e, de modo, nas aulas dessa disciplina, há a predominância para o cálculo de primitivas em detrimento da busca de significados para a Integral.

Originalmente, a Integral Definida (ou Integral de Riemann) tem sua definição baseada em um cálculo de infinitas somas, conforme definição destacada por Stewart (2014):

> Definição de Integral Definida: Se f é uma função contínua definida em $a \leq x \leq b$, dividimos o intervalo [a,b] em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Sejam $x_0(= a), x_1, x_2, \dots, x_n(= b)$ as extremidades desses subintervalos, e sejam $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ pontos amostrais arbitrários nesses subintervalos, de forma que x_i^* esteja no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então a Integral Definida de *f* de *a* a *b* é $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$, desde que o limite exista e dê o mesmo valor para todas as possíveis escolhas de pontos amostrais. Se ele existir, dizemos que *f* é integrável em [a,b]. (STEWART, 2014, p. 337).

Ainda, Stewart (2014, p. 337) retrata que, quando se toma o limite da soma dessas áreas, em um intervalo específico, tem-se a definição de Integral Definida, especificada como: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(r)dr;$ e esclarece que a soma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$ é chamada soma de Riemann, em homenagem ao matemático Bernhard Riemann (1826-1866). Assim, a definição diz que a Integral Definida, de uma função integrável, pode ser aproximada com qualquer grau de precisão desejado, por uma soma de Riemann.

A Integral pode ser aplicada em diversas áreas de estudos, como, por exemplo, na Geometria, Física, Computação, Economia, dentre outras áreas, colocando-se como ferramenta de diversas aplicações, pois pode ser usada para o cálculo de probabilidades, para definir padrões funcionais, como o crescimento populacional e para cálculos físicos (trabalho, energia, dentre outros). Por esse motivo, esse conteúdo está presente nas ementas de disciplinas de vários cursos superiores como: Matemática, Engenharias, Biologia, Economia, dentre outros.

Todavia, destacamos que o estudante, por não conseguir estabelecer conexões entre teoria e prática, tem dificuldades em entender os conceitos relacionados à Integral Definida, restringindo-se aos resultados especificamente numéricos, encontrados por meio de aplicações de técnicas, não percebendo os significados daquelas medidas em distintas áreas das ciências.

Marques (2014) destaca a aplicabilidade do Cálculo Integral:

> A ênfase inicial da matemática nos impérios mais avançados na Antiguidade, do Egito e da Babilônia, ocorreu na aritmética e na mensuração. No último caso, havia interesse especial na mensuração de áreas de terras e de volumes de espaços destinados a abrigar cereais. Documentos comprovam que cerca de dois mil anos antes de Cristo, os babilônios já se preocupavam com a determinação de áreas de polígonos regulares, bem como da área do círculo. A solução definitiva do problema da determinação de áreas veio com o Cálculo, proposto quase simultaneamente por Newton e Leibniz ao final do século XVII. O Cálculo Integral, especificamente, é mais do que a solução do problema da determinação de áreas e volumes. Vai além, portanto, do seu uso na geometria plana e espacial. (MARQUES, 2014, p. 357).

Diante da problemática apresentada, relativa aos processos de ensino e de aprendizagem da Integral Definida, algumas questões norteiam nossa investigação, como: Qual a compreensão dos estudantes sobre o significado de Integrais Definidas? Que situações devem ser apresentadas ao estudante, de forma que esse possa estabelecer conexões entre a teoria estudada e as aplicações das Integrais Definidas? Quais os conceitos intramatemáticos e extramatemáticos podem ser estudados, por meio de situações-problemas que envolvem Integrais Definidas? Que práticas computacionais podem contribuir para que os significados da Integral Definida possam emergir, a partir das aplicações desse conceito, no contexto de distintas áreas de conhecimento?

Assim, nos atentamos para a possibilidade de apresentar aos estudantes aspectos que podem ajudá-los a mobilizar seus processos cognitivos, ampliando o tratamento formal que, normalmente, é utilizado no ensino da Integral Definida. Esses aspectos estão relacionados ao estudo das aplicações da Integral Definida em algumas áreas do conhecimento.

Almeida (2017) também reforça a necessidade da integração teoria e prática em investigações relacionadas ao ensino de Cálculo e registra, em sua pesquisa, materiais para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral, com intuito de preencher a lacuna da necessidade de produção e disponibilização de materiais, baseados em constructos teóricos e resultados de pesquisas, apresentando atividades que foram embasadas em referenciais teóricos da Educação Matemática.

Nesse trabalho, David Tall (1989, *apud* ALMEIDA, 2017) conceitua Integral tomando como raiz cognitiva a área da região do plano, abaixo do gráfico da função, ou seja, a área da região compreendida entre o eixo x, o gráfico da função e as retas $x = a$ e $x = b$, sendo $[a, b]$ o intervalo de integração. Importante ressaltar que o termo raiz cognitiva é um conceito âncora abordado por Tall (1989) e associado ao conceito de organizador genérico, como citado por Almeida (2017):

> [...] o conceito denominado raiz cognitiva que tem como função compor um organizador genérico. Ele é definido "como uma unidade cognitiva que é (potencialmente) significativa ao estudante naquele momento; no entanto, deve conter sementes de uma expansão cognitiva para definições formais e para mais tarde desenvolvimento teórico" (TALL, 2000, p.11 *apud* ALMEIDA, 2017, p. 61). Ou ainda, "é um conceito âncora que o aprendiz acha mais fácil para compreender, e ainda, constitui-se uma base na qual uma teoria pode ser construída (TALL, 1989, p. 9 *apud* ALMEIDA, 2017, p. 61).

Almeida (2017) também explicita o conceito de organizador genérico, citando Tall (2000):

> Tall propõe a noção de organizador genérico, que é definida como um ambiente ou (micromundo) que permite ao aprendiz manipular exemplos e (se possível) contraexemplos de um conceito matemático específico ou de um sistema de conceitos relacionados (TALL, 2000, p. 10 *apud* ALMEIDA, 2017, p. 58).

A raiz cognitiva do conceito de Integral está associada ao cálculo de áreas, quando a função a ser integrada é positiva no intervalo [a, b] de integração, conforme destaca o autor.

O cálculo de áreas se apresenta, dentre desse constructo teórico, como uma unidade cognitiva que é, potencialmente, significativa para o estudante naquele momento. No entanto, assim como retrata Tall, esse é o primeiro passo para uma ampliação cognitiva do conceito. O que destacamos em nosso trabalho é que, por algumas vezes, essa raiz cognitiva não é expandida pelos estudantes, que não chegam às definições formais e não têm o desenvolvimento teórico promovido para esse conceito, pois não conseguem articular essa área a outros contextos e, por fim, não conseguem estabelecer uma relação teoria-prática que aborde os vários significados da Integral.

Assim, as atividades a serem planejadas em nossa pesquisa, assim como essa que apresentamos a seguir, como exemplo, trazem essa noção de organizador genérico, pois possibilitam a manipulação de exemplos e contraexemplos que irão trabalhar, de forma contextualizada, os vários significados da Integral Definida.

Almeida (2017) também relata que Tall usa como exemplo de organizador genérico um *software* que permite a interação entre o usuário e a máquina. Nesse caso, traz algumas aplicações a serem executadas no *software* GeoGebra e destaca que "um organizador genérico bem delineado deve conter o potencial para a compreensão sobre a teoria posterior" (TALL, 1989, p. 85 *apud* ALMEIDA, 2017, p. 72).

2 Aplicações para o ensino e a aprendizagem da Integral Definida em contextos intramatemáticos e extramatemáticos

Diante desse cenário, o percurso metodológico de nossa pesquisa, se constitui em desenvolver uma proposta pedagógica e tecnológica para os processos de ensino e de aprendizagem da Integral Definida, com base em situações-problema que abordam contextos intra e extramatemáticos, com o uso do *software* GeoGebra. Na execução dessa proposta, a ser aplicada a estudantes do curso de Matemática, poderemos acompanhar a evolução do desenvolvimento da compreensão desses, ao realizar as práticas matemáticas acerca dos conceitos relativos à Integral Definida. A metodologia de pesquisa utilizada se apresenta com aspectos da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1991), em suas fases (estudo preliminar, desenho, implementação e avaliação).

Alguns autores acreditam que as atitudes criativas devem ser fomentadas por meio da promoção de processos matemáticos, como explorar, usar representações diferentes e ambientes tecnológicos colaborativos, ou projetos, e colocar atividades de resolução de problemas em contextos do mundo real (VERSCHAFFEL; GREER; DE CORTE, 2000 *apud* VANEGAS, GIMÉNEZ, 2018). O *software* GeoGebra será utilizado como ferramenta nas aplicações de nossa pesquisa, de forma a permitir experiências interativas que possam facilitar a realização dos processos matemáticos pelos estudantes.

Dubinsky e Tall (1991, *apud* SANTOS, 2008, p. 45) destacam o papel de ferramenta assumido por alguns *softwares* na aprendizagem de tópicos matemáticos avançados. Esses autores ressaltam a importância da visualização, como um processo cognitivo do pensamento matemático avançado, útil na aprendizagem de tópicos de Matemática (SANTOS, 2008, p.52). Por meio da visualização, é possível promover uma poderosa fundamentação cognitiva para o desenvolvimento da teoria formal em Matemática. Nesse sentido, o *software* GeoGebra poderá facilitar a mobilização de conhecimentos associados a alguns processos cognitivos.

Segundo Dreyfus (1991), a geração de representações mentais depende dos sistemas de representação, de produções externas, concretas, artefatos que podem ser materialmente percebidas pelo sujeito. Ao trabalhar o conceito de Integral Definida, o estudante terá acesso às funções, aos gráficos, aos algoritmos de resolução, às tabelas, que são considerados artefatos.

Tais aplicações poderão ser apresentadas em contextos intramatemáticos e extramatemáticos, de forma a possibilitar o estabelecimento de conexões entre os conteúdos matemáticos e da Matemática com situações presentes em contextos da vida real.

Assim como em Flores e Garcia (2017), consideramos conexões intramatemáticas as estabelecidas entre conceitos, procedimentos, teoremas, argumentos e representações matemáticas; e conexões extramatemáticas as que estabelecem uma relação de um conceito ou modelo matemático com um problema em contexto (não matemático) ou de forma recíproca.

3 Exemplos de Aplicações em Contextos IntraMatemáticos e ExtraMatemáticos

Businkas (2008) estabelece diferentes tipos de conexões (diferentes representações, inclusão, procedimento) e Flores e Garcia (2017) acrescentam a essa tipologia ligação entre conceitos matemáticos, citando Evitts (2004):

> Ligação entre conceitos matemáticos: esta tipologia contribui para a concepção da matemática como um todo integrado (EVITTS, 2004). Identifica-se quando um aluno relaciona o conceito A ao conceito B, quer para argumentar a sua resposta a um determinado problema, quer para explicar um conceito C. (FLORES; GARCIA, 2017, p. 161).

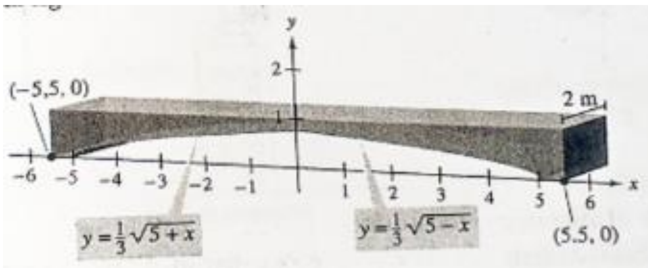
A aplicação a seguir foi retirada e adaptada do livro de Cálculo com Aplicações dos autores Larson e Edwards (2010). Trata-se de uma aplicação que faz uma conexão entre a Matemática e a Engenharia Civil.

Esse exemplo pode ser considerado como uma atividade em um contexto extramatemático, pois, conforme Evitts (2004), o conhecimento conectado pode ser descrito em termos de sua construção e significado.

3.1 Aplicação 1: Projeto de Construção – Cálculo de volume de concreto

A Figura 1 traz um Projeto de Construção: Peças de concreto para novo edifício que tem as dimensões (em metros) e o formato conforme apresentado na imagem:

Figura 1 – Representação matemática de uma peça de concreto



Fonte: Larson e Edwards (2010, p. 451).

A aplicação solicita, inicialmente, determinar a área da face da seção que está no sistema de eixos coordenados retangulares. Assim, analisando a construção, podemos inferir que a área da face é igual à área do polígono ABCD menos a área das curvas $y = \frac{1}{3}\sqrt{5+x}$ e $y = \frac{1}{3}\sqrt{5-x}$ no intervalo de [-5,5].

Como temos duas curvas simétricas, sendo uma no intervalo [-5,0] e outra no intervalo [0,5], é possível a elaboração do seguinte modelo matemático:

$$A_{face} = A_{ABCD} - \frac{1}{3}\int_{-5}^{0} \sqrt{5+x}\, dx$$

Procedendo os cálculos algébricos e numéricos, temos:

$A_{ABCD} = |6{,}5 - (-5{,}5)|.1 = 11m^2$

$\frac{1}{3}\int_{-5}^{0}\sqrt{5+x}\,dx = \frac{1}{3}\left(\sqrt{(5+x)^3}.\frac{2}{3}|_{-5}^{0}\right) = \frac{2}{9}\left(\sqrt{(5+x)^3}|_{-5}^{0}\right) = \frac{2}{9}.\sqrt{125} = \frac{10\sqrt{5}}{9}m^2$

Portanto a área da face poligonal é $A_{face} = 11 - 2.\left(\frac{10\sqrt{5}}{9}\right) = 6{,}03097m^2$.

Em seguida, é solicitada, na atividade, a determinação da medida do volume de concreto em uma das seções, multiplicando a área obtida por 2 metros, visto que se deseja uma peça com 2 metros de altura. Assim: $V = A_{face}.2 \cong 6{,}031\ .2 = 12{,}062m^3$

Como próxima atividade para essa aplicação, é solicitado, considerando que um metro cúbico de concreto pesa 5000 libras, que se calcule o peso dessa peça.

Procedendo aos cálculos: $Peso\ = 5000\ .12{,}062 = 60{,}310\ libras$.

O último passo proposto é fazer o esboço da representação dessa estrutura no *software* GeoGebra.

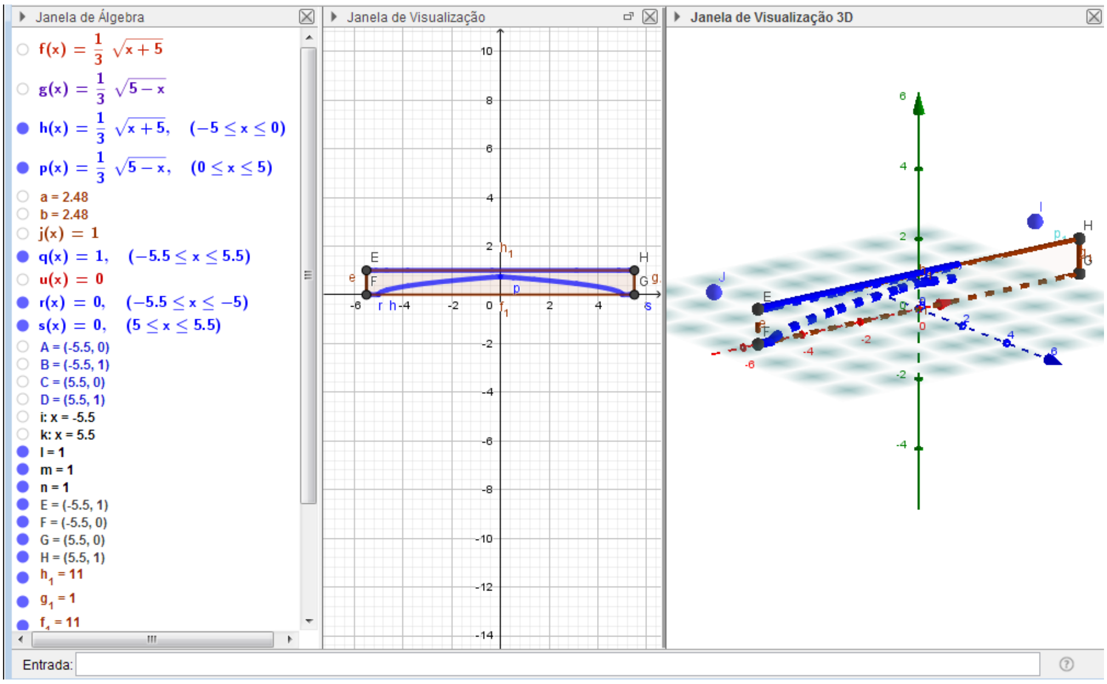
Após uma sequência de passos, é possível elaborar a seguinte representação da peça no GeoGebra, com visualização no espaço 2D e no 3D, conforme ilustrado na Figura 2.

Essa aplicação denota, de forma evidente, a conexão de modelagem de ligação que, segundo Evitts (2004 *apud* FLORES; GARCIA, 2017),

> [...] pode ser caracterizada pela interação da informação do mundo real com uma representação matemática adequada (EVITTS, 2004). É apresentada quando o aluno, partindo de um problema em contexto, constrói um modelo matemático para fornecer uma solução. Uma vez construído o modelo, ele faz uso de diversos conhecimentos (matemáticos ou não) e executa diversas ações (algébricas, gráficas, etc) para chegar a uma resposta coerente à situação colocada (FLORES; GARCIA, 2017, p. 161).

Essa conexão do tipo Modelagem relaciona o problema do volume do concreto utilizado para se fazer a peça (contexto físico) com o problema da área da face da seção que está no sistema de eixos coordenados retangulares e expressa seu resultado no contexto em que o problema surge, sendo o volume de concreto utilizado em metros cúbicos e o peso da peça, em libras. Ainda, sendo possível, relaciona o problema do volume de concreto utilizado, associado a um modelo matemático (Integral Definida), que possibilita obter as soluções referentes ao itens da questão.

Figura 2 – Representação matemática de uma peça de concreto no GeoGebra



Fonte: A Autora.

Nesse tipo de atividade, o estudante poderá perceber que o cálculo do volume da peça, pode ser realizado por meio do cálculo da área daquela, utilizando a Integral Definida como um modelo matemático. Dessa forma, articula a obtenção do volume da peça (que tem um sentido físico) com a Integral Definida da função, que determina a curva da peça, em um intervalo específico, e relaciona o resultado matemático no contexto físico do problema, ao obter o resultado de que o volume do concreto é de, aproximadamente, 12 metros cúbicos.

As diferentes representações podem ser vislumbradas pelos estudantes nessa atividade, pois poderão observar as representações algébricas, gráficas e geométricas, analisando a figura proposta na aplicação, ou mesmo fazendo o esboço dessa figura, no *software* GeoGebra, por meio das equações das curvas que a formam. Assim, há uma potencialização da relação entre a representação gráfica e a algébrica.

Considerações Finais

Defendemos a ideia de que o ensino da técnica é fundamental, porém, a técnica isolada não possibilita uma aprendizagem significativa. Por isso, nossa pesquisa engloba a utilização de aspectos das aplicações, na condução do processo de ensino das Integrais Definidas, pois um processo de ensino e aprendizagem, baseado na relação teoria e prática, é um ambiente rico para essas conexões. A articulação coerente entre a teoria e a prática, por meio da investigação, consiste em um objetivo a ser alcançado na educação.

Em alguns casos, há uma restrição da didática com problemas usuais e, frequentemente, problemas relacionados à Física. Esse tipo de procedimento leva à formação deficitária do acadêmico que, quando se depara com situações diferentes, não sabe resolver o problema proposto, ou mesmo não tem ideia se os resultados obtidos expressam o que realmente pretendia determinar.

Como procedimento de pesquisa qualitativa em Educação, envolvendo a participação de sujeitos humanos, implicados no processo educacional, será respeitada a confidencialidade e anonimato dos nomes dos estudantes participantes. As informações coletadas serão usadas, única e exclusivamente, para a pesquisa, que resultará em uma tese de doutorado do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP. Ainda destacamos que essa pesquisa será submetida ao Comitê de Ética.

Como se trata de uma pesquisa em andamento, ainda não temos resultados para análise, que ocorrerá de forma qualitativa, a partir da observação e dos registros das atividades desenvolvidas pelos acadêmicos em consonância com os resultados das pesquisas realizadas em didática do Cálculo. Em uma análise *a priori*, esperamos que, durante o desenvolvimento das sequências de atividades, os estudantes possam fazer observações, levantar conjecturas, buscando validá-las, de forma a estabelecerem uma relação teórica-prática, que os aproximem de uma melhor compreensão dos significados da Integral Definida.

Agradecimentos

Agradecemos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela Bolsa de Estudos concedida, o que está permitindo o desenvolvimento desta pesquisa.

Referências

ALMEIDA. M. V. de. **Material para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral**: Referências de Tall, Gueudet e Trouche. 2017. 259f. Tese (Doutorado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP. São Paulo, 2017.

ARTIGUE, M. Analysis. In: TALL, D (ed). **Advanced Mathematical Thinking.** Nueva York: Kluwer Academic Publishers. 1991. p. 167-198.

ARTIGUE, M. L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 18, n. 2, p. 231 - 262, 1998.

BUSINSKAS, A. **Conversations About Connections: how secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections**. 2008. 183f. Tese (Doutorado). Faculty of Education, Simon Fraser University. Canada. 2008.

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: TALL, D. **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. p. 25-41.

DREYFUS, T.; EISENBERG, T. On difficulties with diagrams: theoretical issues. **Proceedings of the Fourteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education**, v. 2. p. 27-33, 1990.

DUBINSKY, E.; TALL, D. Advanced mathematical Thinking and the Computer. In: TALL, D. **Advanced Mathematical Thinking.** New York: Kluwer Academic Publisher, 1991. p. 231-243.

EVITTS, T. **Investigating the Mathematical Connections that Preservice Teachers Use and Develop While Solving Problems from Reform Curricula**. 2004. 308f. Tese (Doctor of Philosophy) – Pennsylvania State University College of Education, Pennsylvania, 2004.

FLORES, C. GARCIA, J. Conexiones Intramatemáticas y Extramatemáticas que se producen al Resolver Problemas de Cálculo en Contexto: un Estudio de Casos en el Nivel Superior. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 31, n. 57, p. 158 - 180, abr. 2017. Disponível em http://www.scielo.br/pdf/bolema/v31n57/0103-636X-bolema-31-57-0158.pdf. Acesso em 16 ago. 2019.

GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S. **La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos**. Problemas de enseñanza y de aprendizaje. 2006, 498f. Tese (Doctorales). Laguna: Universidad La Laguna (Espagne). 2006.

LARSON, R.; EDWARDS, B. H. **Cálculo com Aplicações**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

MARQUES, G. da C. **Fundamentos de Matemática I**. 1. ed. Licenciatura em Ciências, Módulo 1: Terra e Universo. São Paulo: USP/Univesp/Edusp, 2014. 460 p.

ORTON, A. Students' Understanding of Integration. **Educational Studies in Mathematics**, v. 1, n. 14, p.1-18, 1983.

SANTOS, F. **V. Modelagem Matemática e Tecnologia de informação e comunicação: o uso que os alunos fazem do computador em atividades de modelagem.** 2008. 176f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

STEWART, J. **Cálculo.** Vol.1.Tradução: EZ2 Translate. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

TALL, D. Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers (how the computer can support mathematical thinking and learning). In: **Asian Technology Conference In Mathematics**, 5, 2000, Chiang Mai. Proceedings... Blackwood: ATCM Inc.

TALL, D. Concept Images, Generic Organizers, Computers, and Curriculum Change. **The Learning of Mathematics**, v. 3, n. 9, p. 37-42, 1989.

VANEGAS, Y.; GIMÉNEZ, J. Conexões extramatemáticas na formação inicial de docentes. **Estudos Avançados**, v. 32, n. 94, p. 153-169, 13 dez. 2018.

VERSCHAFFEL, L.; GREER, B.; DE CORTE, E. (ed.) **Making Sense of Word Problems, Heereweg**, The Netherlands: Swets & Zeitlinger, 2000.