

## Uma proposta de abordagem contextualizada das integrais múltiplas na engenharia

---

GALVINA MARIA DE SOUZA<sup>1</sup>

GABRIEL LOUREIRO DE LIMA<sup>2</sup>

### Resumo

*Esse estudo apresenta um recorte de uma pesquisa de doutorado em desenvolvimento que tem como principal objetivo propor uma alternativa pedagógica para o ensino das Integrais Múltiplas para estudantes de engenharia do ciclo básico, fundamentada na teoria Matemática no Contexto das Ciências. A ideia é analisar o processo de ensino dessas integrais a partir da construção de uma sequência de atividades que tem como principais elementos uma ferramenta de trabalho interdisciplinar que, no referencial teórico adotado, recebe o nome de Eventos Contextualizados (EC). Neste artigo, apresentamos parte de um dos EC que comporá a nossa sequência, construído a fim de aplicar as integrais duplas em uma situação que faz sentido para o estudante de engenharia no contexto de sua formação na graduação e de sua formação profissional. O evento foi construído fundamentado por um problema de mecânica dos fluidos. Atualmente, temos nos dedicado à construção da sequência e, esperamos que ela, por meio dos EC, possa contribuir para um estudo mais significativo dessas integrais no contexto dos cursos de Engenharia.*

**Palavras-chave** *Integrais Múltiplas; Análise de escoamento de Fluidos; A Matemática no Contexto das Ciências.*

### Abstract

*This work is an excerpt of doctoral research under development which have as primary objective the purpose of a pedagogical alternative for Multiple Integrals teaching for Basic Cycle Engineering students reasoned in the “Mathematics in Sciences Context” theory. The objective is to analyze the teaching process of these Integrals by construction of an activities sequence which essential factors are an interdisciplinary work instrument called “Contextualized Events (CE)” in the theoretical referencial adopted. In this article, it’s presented part of a CE that will compose the sequence, which was constructed for to apply Double Integrals in a situation that make sense to Engineering students in graduation course and professional development. The construction of this event was based on a fluid mechanics problem. Currently, it’s dedicated to sequence construction and it’s expected this sequence via CE can contribute to a more significant study of these Integrals in the Engineering courses context.*

**Keywords:** *Multiple Integrals; Fluid Flow Analysis; Mathematics in Sciences Context.*

---

<sup>1</sup> Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PEPG em Educação Matemática – e-mail: galvina04@yahoo.com.br.

<sup>2</sup> Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PEPG em Educação Matemática – e-mail: gllima@pucsp.br.

## Introdução

Esse artigo apresenta parte de uma pesquisa de doutorado em desenvolvimento em que, visando tornar mais significativo o estudo das integrais múltiplas para alunos de Engenharia, propusemo-nos a construir uma sequência didática composta por diferentes *Eventos Contextualizados* (EC), que, no âmbito do referencial teórico que temos adotado, são problemas integrando disciplinas matemáticas e não matemáticas. Pretendemos, com essa sequência, estender a ideia de integrais definidas de funções reais de uma variável real, para integrais duplas e triplas de funções reais de duas ou três variáveis, aplicadas a situações que vão além do estudo de cálculo de medidas de áreas e volumes. Dessa forma, objetivamos que a sequência, por meio dos EC, possa introduzir, desenvolver e formalizar todo o estudo dessas integrais.

Nesta perspectiva, adotamos, como referencial teórico a *Matemática no Contexto das Ciências – MCC*, da pesquisadora mexicana Patricia Camarena, quem vem subsidiar as reflexões para o ensino e aprendizagem de Matemática em cursos de graduação nos quais essa disciplina está a serviço, com a principal preocupação de vincular os estudos entre as disciplinas matemáticas e as não matemáticas desses cursos.

Nesse artigo, o nosso principal objetivo é apresentar parte de um dos EC que construímos para compor nossa sequência, com ênfase na aplicação das integrais duplas em uma situação que faz sentido para o estudante de engenharia no contexto de sua formação na graduação e de sua formação profissional. O evento foi construído fundamentado por um problema de mecânica dos fluidos – a análise diferencial do escoamento de fluidos. Um dos elementos que faz parte do EC, discutido nesse artigo, é a *História do Evento Contextualizado*, visto em Camarena (2017, p.9) como um documento que contém, entre outros, a descrição do evento e sua função, os conhecimentos matemáticos que serão abordados por meio dele, entre outros. Apresentamos também, um pouco da organização didática do EC.

### 1 Aspectos da Matemática no contexto das Ciências – MCC

A MCC propõe um sistema para os processos de ensino e aprendizagem constituído de cinco fases: *fase curricular*, que visa a construção de um currículo de Matemática por meio do qual o estudante tenha acesso a essa ciência como ferramenta aplicada às disciplinas específicas de seu curso e suas futuras ações sociais e profissionalizantes; *fase didática*, que fundamenta a construção e a implementação dos EC; *fase cognitiva*

que permite a construção de reflexões a respeito da aprendizagem interdisciplinar; *fase epistemológica* que evidencia a vinculação das ciências com a Matemática e vice-versa; e, finalmente, *fase docente*, em que são realizados estudos e atividades visando à formação dos docentes dos cursos de graduação, com vistas à MCC. Para maiores informações sobre essas fases consultar Camarena (2010, 2013).

Para esse artigo, nos concentramos na fase didática, que compreende o *Modelo Didático da Matemática em Contexto* (MoDiMaCo), que fundamenta a construção dos EC e que tem como principal objetivo “estimular a construção de conhecimento por parte do graduando e o desenvolvimento de habilidades para vinculá-lo às suas futuras áreas de atuação profissional” (LIMA; BIANCHINI; GOMES, 2018, p. 4). No MoDiMaCo, [...] “os EC são a principal ferramenta de trabalho para o docente em sala de aula, sendo os instrumentos capazes de permitir a construção do conhecimento por parte do aluno e o desenvolvimento de habilidades para a transferência do conhecimento matemático para as áreas sociais nas quais é necessário.” (GOMES, 2019, p. 2)

Dessa forma, as fontes de contexto para a busca e construção de um EC estabelecidas em Camarena (2017, p.7-8), são: a ciência em estudo e sua vinculação com as disciplinas do curso, com a atuação profissional dos estudantes após sua formação e com as situações da vida cotidiana do estudante que mobilizam a matemática.

Fundamentados nessas fontes, conforme Camarena (2017, p.8), os EC podem ser classificados em três níveis cognitivos: nível baixo, se foi elaborado a partir de situações da vida cotidiana dos estudantes; nível médio, se foi elaborado a partir de aplicações da ciência cursada pelo estudante; nível alto ou complexo, se foi elaborado a partir de situações de contextos do trabalho profissional do estudante.

Dessa forma, considerando as fontes e níveis de complexidade dos EC, faz-se necessário selecionar situações aplicadas à Engenharia, observando quais conteúdos matemáticos podem ser explorados por meio dessas situações e em quais disciplinas matemáticas esses conteúdos estão alocados; bem como em qual momento dessa disciplina matemática esses conteúdos serão abordados, a fim de verificar se essas situações poderão compor um EC. Esse processo está previsto pela *etapa central da Metodologia Dipping*, contida na *fase curricular* da MCC.

Isso posto, conforme proposto pela MCC, o próximo passo é o processo de construção do EC pelo professor e a realização da análise *a priori* da situação de ensino, que resulta

em um documento intitulado, em Camarena (2017, p.9), por *História do Evento Contextualizado*. Esse documento deve conter a descrição do EC e sua função, os conhecimentos matemáticos que serão abordados por meio do EC, os conhecimentos prévios requeridos em sua solução, os conhecimentos do contexto presentes no evento, as diferentes formas de resolução, os obstáculos que os estudantes podem enfrentar, dentre outros, e serve como um guia para o professor durante o processo de construção do evento, orientando suas ações em sala de aula durante a aplicação do evento aos estudantes, conforme previsto na *fase didática da Matemática em Contexto* (CAMARENA, 2002a).

As funções de um EC podem ser: realizar diagnósticos, motivar os estudantes, construir conhecimento, fixar um conteúdo estudado, dar andamento a um conteúdo abordado ou permitir a superação de obstáculos de aprendizagem, Camarena (2017, p.9).

É mister esclarecer que, conforme Camarena (2017), a função do EC somente é determinada após a identificação, pelo docente, dos conhecimentos prévios que os estudantes têm em suas estruturas cognitivas e se os estudantes serão capazes de estabelecer uma ponte entre esses conhecimentos e o novo conhecimento a ser construído, proporcionando uma *aprendizagem significativa*, aqui entendida, conforme fundamentada na *Teoria das Aprendizagens Significativas* (AUSUBEL, 1980) definida em Moreira (2001), como a aprendizagem que acontece quando o estudante é capaz de receber novas informações e racionalizar de forma a construir uma interação com o que já se sabe previamente e o que se acabou de conhecer.

O modelo MoDiMaCo em seus dois eixos norteadores, permite a contextualização da Matemática por meio de um trabalho interdisciplinar com etapas definidas que orientam o trabalho dos docentes, e também, a sua descontextualização dando-lhe o formalismo a que a futura profissão do aluno exige (CAMARENA, 2017, p.11).

Como citado anteriormente, o nosso principal objetivo nesse artigo é apresentar um dos EC que comporá a nossa sequência, o objetivo de aplicar as integrais duplas em uma situação que faça sentido para o estudante de engenharia no contexto de sua formação na graduação e de sua formação profissional.

O problema envolve, no contexto da Engenharia, entre outros conceitos, escoamento laminar, escoamento estacionário, escoamento incompressível e fluido newtoniano, para os quais, nesse artigo não é nosso objetivo trazer uma discussão mais detalhada,

embora, nas nossa proposta de estratégia de aplicação do problema, devem ser considerados pois trazem implicações específicas para a solução interpretação e solução do problema.

## 2 O Problema e uma possível organização didática para o evento construído a partir dele

O problema descreve o escoamento laminar, estacionário, incompressível, de um fluido newtoniano no interior de uma tubulação de secção cilíndrica, para o qual é realizada, do ponto de vista da Engenharia, uma análise diferencial do escoamento desse fluido nessa tubulação por meio da solução exata do conjunto de equações diferenciais formadas pela *equação da continuidade incompressível* e pela da *equação de Navier-Stokes*. Para mais informações sobre essas equações, consultar Çengel e Cimbala (2015).

### Quadro 1: Problema

Considere o escoamento laminar, estacionário, incompressível, de um fluido newtoniano em um tubo infinitamente longo de diâmetro  $D$  e raio  $R = D/2$ , para o qual, desprezando o efeito da gravidade, é aplicado um gradiente constante de pressão na direção de  $x$  empurrando o fluido através do tubo. O gradiente de pressão, normalmente causado por uma bomba ou gravidade, é dado por:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_2 - P_1}{x_2 - x_1} = \text{constante}, \quad (1)$$

em que  $x_1$  e  $x_2$  são duas localizações arbitrárias ao longo do eixo  $x$ , e  $P_1$  e  $P_2$  são as pressões naquelas duas localizações.

Adotando um sistema de coordenadas cilíndricas modificado com  $x$  em lugar de  $z$  como componente axial, ou seja,  $(r, \theta, x)$  e  $(u_r, u_\theta, u_x)$ , deduza uma expressão para o campo de velocidade dentro do tubo para estimar a força de cisalhamento viscoso por unidade de área de superfície agindo na parede do tubo.

Fonte: Adaptado de Çengel e Cimbala (2015)

Durante a exploração e análise do problema do ponto de vista da Matemática, identificamos que nele é mobilizada, durante a resolução, uma quantidade significativa de conteúdos matemáticos. Podemos citar: o *sistema de coordenadas cilíndricas*, uma

*equação diferencial geral* (aplicada na conservação de massa), a *equação da continuidade*, o *teorema do divergente (teorema de Gauss)*<sup>3</sup> (aplicado à dedução da equação da continuidade), a equação de Navier - Stokes, que é uma equação diferencial parcial, não estacionária, não linear de segunda ordem, as derivadas parciais totais e as integrais duplas (no cálculo da vazão volumétrica através do tubo). Entretanto, dependendo do público-alvo para o qual o EC está sendo construído, é possível que o professor tenha que simplificá-lo de forma a mobilizar conteúdos matemáticos que já sejam de conhecimento do estudante, além, é claro do conteúdo que se deseja introduzir a partir do evento.

Isso evidencia a oportunidade de os professores explorarem esse problema nesses aspectos em suas aulas de disciplinas matemáticas dos cursos de Engenharia, em diferentes “tempos” do currículo dos estudantes, se propuserem uma organização didática adequada.

Com o objetivo de trabalhar com estudantes da disciplina Cálculo Diferencial e Integral III alocada no terceiro período e ministrada conjuntamente para diferentes habilitações de Engenharia, propusemos uma organização didática para o problema visando apresentar aos estudantes uma aplicação das integrais duplas em uma situação que faça sentido para o futuro engenheiro, tanto no contexto de sua formação na graduação, quanto de sua formação profissional. Neste artigo, apresentamos sucintamente a história do evento e organização didática, enfatizando apenas um aspecto do problema: o cálculo da velocidade axial máxima no centro do tubo.

Na breve apresentação da história do EC pensada para esse artigo, destacamos os seguintes elementos:

- *A função do evento*: dar sentido às integrais múltiplas no contexto da graduação do estudante de Engenharia e de sua atuação profissional.
- *Habilidades prévias esperadas* durante a resolução do evento: cálculo de integrais de funções reais de duas ou mais variáveis.
- *Conhecimentos matemáticos envolvidos*: sistema de coordenadas cilíndricas, equação diferencial geral, o teorema do divergente, equação diferencial parcial,

---

<sup>3</sup> O teorema do divergente nos permite transformar uma equação do volume do divergente de um vetor em uma integral de área sobre superfície que define o volume. (ÇENGEL; CIMBALA, p. 439)

não estacionária, não linear de segunda ordem, as derivadas parciais totais e as integrais duplas.

- *Conhecimentos prévios de Matemática esperados* do estudante: Conhecimentos básicos sobre cálculo vetorial, retas, planos, cônicas e quádricas e o sistema de coordenadas polares.
- *Conhecimento do contexto presentes no evento*: equação da continuidade, a equação de Navier – Stokes, conceitos básicos de mecânica dos fluidos, definição, classificação e propriedades dos escoamentos de fluidos interior de tubulações cilíndricas, definição e propriedades de um fluido newtoniano.
- *Formas de resolução do evento*: Durante a resolução do problema, há um momento em que será necessário calcular a velocidade axial máxima que ocorre no centro do tubo. Integrando através de toda a seção transversal do tubo a equação da velocidade máxima, dada por  $u_{max} = -\frac{R^2}{4\mu} \cdot \frac{dP}{dx}$  podemos encontrar a vazão volumétrica através do tubo.

$$V = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R ur \, dr \, d\theta = -\frac{2\pi}{4\mu} \cdot \frac{dP}{dx} \int_{r=0}^R (r^2 - R^2)r \, dr = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \cdot \frac{dP}{dx}$$

Como a vazão volumétrica  $V$  é também igual a velocidade axial média multiplicada pela área da seção transversal, determinamos, a velocidade axial média dividindo-se a vazão volumétrica pela área,  $V_{am} = \frac{V}{A} = \frac{\left(-\frac{\pi R^4}{8\mu}\right)\left(\frac{dP}{dx}\right)}{\pi R^2} = -\frac{R^2}{8\mu}$ , que, para o escoamento laminar completamente desenvolvido em tubo, é igual exatamente a metade da velocidade axial máxima.

- *Obstáculos de aprendizagem*: falta de conhecimentos prévios; desinteresse pela atividade, dificuldade em trabalhar em equipes.
- *Recursos tecnológicos*: O Ambiente Virtual de Aprendizagem – AVA – Plataforma CANVAS (plataforma disponível na instituição pesquisada).

### 3 A organização didática do EC

Na organização curricular das disciplinas do ciclo básico da Engenharias Integradas, na instituição em que essa pesquisa está sendo desenvolvida, a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III é ministrada no terceiro período e é nessa disciplina que as funções de várias variáveis são discutidas. A disciplina de Mecânica dos Fluidos,

contexto em que está inserido o problema que originou esse EC, só é ministrada no quarto período, ou seja, os estudantes não terão o domínio dos conhecimentos específicos envolvidos necessários à sua resolução. Dessa forma, consideramos como uma primeira etapa nessa organização didática, a proposição de um trabalho fora de sala de aula, por meio virtual com o uso do AVA – Ambiente Virtual de Aprendizagem, Canvas, em que os alunos serão convidados a realizar atividades com o uso da metodologia ativa *sala de aula invertida*, conforme visto em (Bacich, e Moran, 2018) a fim de obter tais conhecimentos. Esse trabalho será realizado em conjunto com professores da área específica. Será criada, no AVA, uma sala de aula com textos informativos, videoaulas, tarefas, fóruns de discussão e temáticos, bem como com um “caminho de aprendizagem”, baseado no processo de ensino por trilhas de aprendizagem para que os estudantes possam construir o embasamento específico necessário.

Para a etapa seguinte, presencial em sala de aula, conforme visto em (Camarena, 2017), os estudantes serão organizados em grupos de três, cada um com a sua função específica, para iniciar o trabalho de resolução do problema, que será mediado pelo professor induzindo os alunos a uma atitude investigativa, provocando discussões que levem os integrantes dos grupos a conjecturar como a velocidade axial média do fluido em questão pode ser calculada, como podemos relacionar essa velocidade axial média com a área da seção transversal do tubo, qual a relação dessa velocidade com a vazão volumétrica, como podemos calcular essa vazão volumétrica, quais as ferramentas matemáticas necessárias a esses cálculos, qual a interpretação geométrica dessa vazão dentro do tubo. Para esse momento esperamos que os estudantes utilizem de lápis e papel para suas anotações.

Na próxima etapa, também realizada em sala de aula, o professor pode propor às equipes a resolução do problema, e, caso os estudantes apresentem dificuldade, o professor pode realizar intervenções, auxiliando-os na resolução.

Para a etapa final o professor pode propor aos alunos, atividades descontextualizadas a fim de formalizar o assunto abordado.

## **Considerações Finais**

Desde que ingressamos no doutorado, visando tornar mais significativo o estudo das integrais múltiplas para alunos de engenharia, nos propusemos a construir uma



sequência de EC, capaz de estender a ideia de integrais definidas para integrais duplas e triplas de funções de duas ou três variáveis, aplicadas a situações que vão além do estudo de cálculo de medidas de áreas e volumes, fundamentados nos pressupostos teóricos da MCC.

Por meio desse artigo apresentamos parte de um dos EC que comporão nossa sequência de atividades, o que aponta para um resultado positivo de nossos estudos, quanto a possibilidade de tornar significativo o estudo das integrais múltiplas.

Atualmente, temos nos dedicado à construção da sequência e, esperamos que ela, por meio dos EC possa contribuir para um estudo mais significativo dessas integrais no contexto dos cursos de engenharia.

### **Agradecimento**

Agradeço a CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro recebido através da bolsa de doutorado a mim concedida, o que me permitiu a realização desse trabalho.

### **Referências**

AUSUBEL, D.P., NOVAK, J.D. e HANESIAN, H. **Psicologia educacional**. Trad. de Eva Nick et al. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

BACICH, L.; MORAN, J. (Orgs.). **Metodologias ativas para uma educação inovadora**: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

CAMARENA, P. Aportaciones de Investigación al Aprendizaje y Enseñanza de la Matemática en Ingeniería. **Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica**, 2010.

Disponível em:

[http://www.ai.org.mx/ai/archivos/ingresos/camarenagallardo/dra.\\_patricia\\_camarena\\_gallardo.pdf](http://www.ai.org.mx/ai/archivos/ingresos/camarenagallardo/dra._patricia_camarena_gallardo.pdf)- Acesso em 29 de julho de 2019.

CAMARENA, P. G. A treita años de la teoria educativa “Matemática en el Contexto de las Ciencias”. **Innovación Educativa**, v. 13, n. 62, p. 17-44, 2013. Disponível em:

[http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1665-26732013000200003](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-26732013000200003). Acesso em 22 de agosto de 2019

\_\_\_\_\_. Metodología curricular para las ciencias básicas en ingeniería (primera parte). **Revista Innovación Educativa**, v. 2, n. 10, p. 22-28, 2002a.

\_\_\_\_\_. Metodología curricular para las ciencias básicas en ingeniería (segunda parte). **Revista Innovación Educativa**, v. 2, n. 11, p. 4-12, 2017.

\_\_\_\_\_. Didáctica de la matemática en contexto. **Revista Educação Matemática Pesquisa**, v.19, n.2, p.1-26, 2017.

ÇENGEL, Y.A.; CIMBALA, J.M. **Mecânica dos Fluidos – Fundamentos e Aplicações**. São Paulo: Editora McGrawHill, 2015.

GOMES, E.; LIMA, G. L.; BIANCHINI, B. L. ROCHA, K.B.; BOLELLI, P. M. Evento contextualizado: estudo de um problema da Engenharia Civil para o ensino de Matemática. In: XV CIAEM. **Anais**. Medelim, 2019.

LIMA, G. L.; BIANCHINI B. L.; GOMES, E. Cálculo e Análise: Mapeamento das Pesquisas do GT04 – Educação Matemática no Ensino Superior. **Revista Vidya**, v. 37, n. 2, p. 317-334, jul./dez., 2017.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E. **Aprendizagem Significativa**: a teoria de David Ausubel. 2 ed. São Paulo: Centauro, 2001.