

A construção do conhecimento matemático na teoria APOS

JOICE D'ALMEIDA¹

BARBARA LUTAIF BIANCHINI²

Resumo

Este artigo é um recorte de uma tese de doutorado em andamento, desenvolvida pela primeira autora e orientada pela segunda, cujo objetivo principal é investigar a concepção, na acepção de Dubinsky, de professores do ensino público paulista sobre o Teorema Fundamental da Aritmética. O objetivo deste artigo é trazer a ideia de como ocorre a construção do conhecimento matemático segundo a teoria APOS de Ed Dubinsky, apoiado nas ideias de Jean Piaget com a Epistemologia Genética. São apresentados o conceito de abstração reflexiva, considerado o mecanismo mental mais importante no desenvolvimento do pensamento, as definições dos elementos mentais Ação, Processo e Objeto e como interagem entre si para a construção do conhecimento matemático.

Palavras-chave: *Construção do conhecimento matemático; Teoria APOS; abstração reflexiva; ciclo ACE.*

Abstract

This article is an excerpt from an ongoing doctoral thesis, developed by the first author and guided by the second, whose main objective is to investigate the conception, in Dubinsky's sense, of São Paulo public school teachers about the Fundamental Theorem of Arithmetic. The purpose of this article is to bring the idea as is the construction of mathematical knowledge according to APOS theory of Ed Dubinsky, supported by the Jean Piaget's ideas with the Genetic Epistemology. The concept of reflective abstraction is presented, considered the most important mental mechanism in the development of thought, the definitions of the mental elements Action, Process and Object and how they interact with each other for the construction of mathematical knowledge.

Keywords: *Construction of mathematical knowledge; APOS theory; reflective abstraction; ACE cycle.*

Introdução

Este artigo é parte integrante de uma pesquisa de doutorado em andamento que tem por objetivo geral investigar a concepção, na acepção de Dubinsky sobre o Teorema Fundamental da Aritmética em professores atuantes na rede pública do estado de São Paulo. A construção do conhecimento tratada na teoria presente neste artigo será, da

¹ Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PEPG em Educação Matemática – e-mail: joicedijo@yahoo.com.br.

² Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PEPG em Educação Matemática – e-mail: barbara@pucsp.br.

mesma forma, utilizada durante a análise dos dados coletados durante a pesquisa de doutorado.

O conceito de construção está ligado ao ato de construir algo e, por estar ligado a uma ação, é preciso a vontade do indivíduo para seu desenvolvimento. Assim, o conceito de construção aplicado à educação pode ser entendido de duas maneiras: como “constituição do saber feita pelo estudioso, pelo cientista, pelo filósofo resultante da reflexão e da pesquisa sistemática que leva a novos conhecimentos.” (WERNECK, 2006, p. 175), responsáveis pela construção dos conteúdos das disciplinas científicas e como o “modo pelo qual cada um apreende a informação e aprende algum conteúdo.” (idem), no qual o conhecimento já está estabelecido pelo sistema e o sujeito apenas o apropria. Desta forma, a construção do conhecimento não pode feita e forma livre e aleatória, com cada indivíduo a desenvolvendo de forma pessoal, desvinculada com a comunidade científica e com o saber universal.

Sobre o conhecimento, cada indivíduo pode tomar o saber para si de forma empírica, sem entender de fato, como se dá sua origem deste. Portanto, pode adquirir informações de um conhecimento por experiência, pode aceitar por um comportamento de fé, como a sabedora adequada para a dignidade humana, entre outras interpretações. Nenhuma delas, porém, pode ser considerada conhecimento, propriamente dito, ou conhecimento científico por não ter passado pelo crivo da ciência, que pode ser sucintamente definida como o conhecimento sistematizado das causas do fenômeno. Desta forma, o saber pode ser considerado “todo um conjunto de conhecimentos metodicamente adquiridos, mais ou menos sistematicamente organizados, susceptíveis de serem transmitidos por um processo pedagógico de ensino” (JAPIASSU, 1977, p. 15). E o que se trata aqui é sobre o adquirir e transmitir, mas não o construir.

Pode-se, então, perceber que há diferentes formas de se fazer ciência e diversos tipos discursos científicos. Desta forma, neste artigo se entenderá como construção do conhecimento aquela defendida por Piaget, em sua teoria sobre Epistemologia Genética, tomada também por Dubinsky como base para a elaboração da Teoria APOS. Assim, este artigo tem por objetivo apresentar como se dá a construção do conhecimento, especificamente matemático, sob a luz da Teoria APOS.

1 Metodologia

Este artigo tem um cunho analítico, sendo realizado por meio de levantamento e análise bibliográficos. Trata-se de uma pesquisa qualitativa descritiva, conforme apresentam Bogdan e Biklen (1999), em que “os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números. Os resultados escritos da investigação contêm citações feitas com base nos dados para ilustrar e substanciar a apresentação” (BOGDAN; BIKLEN, 1999, p. 48).

Assim, anunciamos e descrevemos inicialmente a Epistemologia Genética de Piaget, juntamente com os elementos importantes em seu trabalho relacionados à construção do conhecimento. Posteriormente, a teoria APOS é definida e apresentados os conceitos que a compõe, além de apresentar o que seria necessário para o trabalho com ideias matemáticas.

2 A Epistemologia Genética de Piaget

Jean Piaget, em sua teoria Epistemologia Genética, tinha como maior preocupação desvendar o instrumento intelectual que promove o conhecimento humano. Buscou entender como se dão os mecanismos que permitem a construção dos diferentes tipos de conhecimento (físico e lógico-matemático), desde o início de sua vida até a idade adulta. Sustenta que a gênese do conhecimento reside no próprio indivíduo, ao afirmar que "o conhecimento não procede nem da experiência única dos objetos nem de uma programação inata pré-formada no sujeito, mas de construções sucessivas com elaborações constantes de estruturas novas" (PIAGET, 1976 apud FREITAS 2000, p. 64). Desta forma, Piaget entende que o conhecimento não é inato e nem externo e depende de suas interações com o objeto para ser construído. Este desenvolvimento ocorre por meio de um mecanismo autorregulatório baseado em um conjunto de condições biológicas, que se ativa pelo agir e interagir com o meio ambiente, físico e social, sendo, portanto, a experiência sensorial e o raciocínio os responsáveis pelo processo de construção do conhecimento humano ou do pensamento lógico do homem.

Assim, a teoria de Piaget tem seu legado como uma teoria geral dos processos de aquisição de conhecimento nos domínios da gênese do pensamento lógico, das grandes categorias de espaço, tempo e causalidade, bem como de noções matemáticas e físicas elementares, mas com grande potencial de explicar os processos de construção de outras noções em outros domínios (FERREIRO, 1996).

O conceito mais marcante na teoria de Piaget é o de equilíbrio, uma vez que explica todo o processo do desenvolvimento do humano. Desta forma, “[...] a lógica representa para Piaget a forma final do equilíbrio das ações. Ela é ‘um sistema de operações, isto é, de ações que se tornaram reversíveis e passíveis de serem compostas entre si’”.(LA TAILLE, 2003, p. 17).

Com a equilíbrio, os mecanismos de assimilação – processo contínuo de tentativa de integração de aspectos experienciais aos esquemas previamente estruturados – e acomodação – capacidade de modificação da estrutura mental antiga para dar conta de dominar um novo objeto do conhecimento – surgem como conceitos distintos, indissociáveis e imprescindíveis para que a adaptação ao meio ambiente ocorra, quando um desequilíbrio acontece.

Ainda que Piaget tenha feito um trabalho profundo e extenso sobre a aquisição do conhecimento pelo indivíduo, por meio de sua Epistemologia Genética, não é possível encontrar muitos escritos sobre a prática pedagógica. Piaget desconfiava da eficácia da pedagogia praticada nas escolas tradicionais e da forma como ela parecia inibir o desenvolvimento espontâneo dos indivíduos, assim como não respeitava o tempo de assimilação dos conceitos.

Mesmo assim, nos poucos artigos que escreveu sobre educação, fez uma contribuição substancial para o pensamento pedagógico atual, levando a elaboração de teorias e metodologias de ensino no âmbito do construtivismo.

3 A teoria APOS

Tendo sua base nos trabalhos de Jean Piaget, a teoria APOS, cujo acrônimo significa Ação, Processo, Objeto e Esquema, é uma teoria elaborada por Ed Dubinsky e busca explicar como um conceito matemático pode ser construído. Assim, tem seu foco nos modelos do que ocorre na mente de um indivíduo ao aprender matemática e por meio do desenvolvimento destes modelos projetar materiais instrucionais e avaliações que possam verificar sucessos ou fracassos dos alunos ao lidar com problemas matemáticos.

Segundo Dubinsky (1996) o desenvolvimento intelectual presente de forma constante nos trabalhos de Piaget, já que ele não trata apenas de aquisição de partes do conhecimento, mas também dos mecanismos que podem levar o indivíduo a aumentar suas habilidades para resolver situações mais complexas. A estes mecanismos pertencem a abstração reflexiva, as dicotomias assimilação-acomodação e

reequilíbrio-desequilíbrio e a tricotomia intra, inter e trans. Tais mecanismos são desenvolvidos, segundo Piaget, de maneira espontânea por meio da maturação, em presença de situações apropriadas.

Dentre estes mecanismos, a chamada abstração reflexiva foi aquela que influenciou grandemente a criação da teoria APOS. A abstração reflexiva, segundo Piaget, é o principal mecanismo para as construções mentais no desenvolvimento do pensamento, assim como o mecanismo mental por meio do qual todas as estruturas lógico-matemáticas são desenvolvidas na mente de um indivíduo.

A abstração reflexiva divide-se em duas partes, sendo a primeira envolvendo a reflexão, no sentido da consciência e do pensamento contemplativo e a segunda envolvendo a reconstrução e a reorganização destes conteúdos neste nível cognitivo mais elevado para que suas operações e propriedades possam se tornar conteúdo em que novas operações e propriedades possam ser aplicadas.

Assim, o papel da pedagogia, então, segundo Dubinsky (1996) seria de ajudar o estudante a desenvolver estes mecanismos para que sejam utilizados de forma conscientes quando for necessário. Os professores precisariam criar situações que estimulem a criatividade e o descobrimento do indivíduo, apresentando situações desequilibrantes para que desenvolva novas ideias de como reequilibrar os conceitos acerca do objeto estudado.

Ainda segundo o autor, sobre como se dá a construção de conceitos matemáticos,

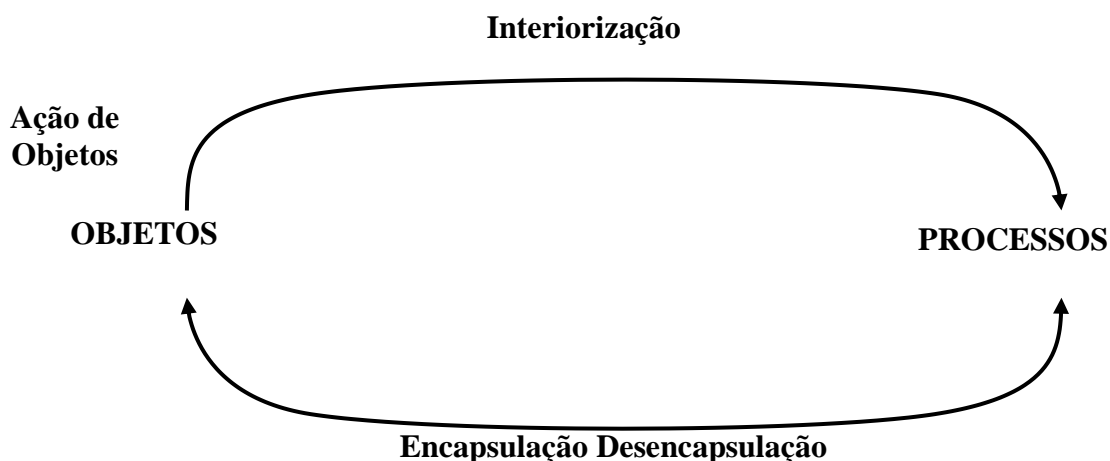
[...] o conhecimento matemático de um indivíduo é sua tendência de responder diante de situações matemáticas problemáticas, refletindo sobre elas em um contexto social e construindo ou reconstruindo Ações, Processos e Objetos matemáticos e organizando-os em esquemas com a finalidade de administrar as situações” (DUBINSKY, 1996, p. 32-33)

Fica claro, portanto, que as situações matemáticas devem promover o surgimento da dicotomia desequilíbrio-reequilíbrio para que o estudante perceba que o conhecimento que ele possui até aquele momento não é suficiente para resolver tal situação. Ao citar um contexto social, o autor enfatiza a necessidade do trabalho cooperativo durante a aprendizagem.

De modo a elucidar como são construídos os elementos que compõem a construção do

conhecimento matemático – a Ação, o Processo e o Objeto –, é apresentado o esquema presente na Figura 1:

Figura 1 - Construção de Ações, Processos e Objetos



Fonte: Dubinsky (1996, p. 34)

Desta forma, a definição de Ação seria “a transformação de Objetos que o indivíduo percebe como algo que é, até certo ponto, externo” (DUBINSKY, 1996, p. 34). Isto significa que um indivíduo que tem seu entendimento no nível da Ação, só consegue executar uma transformação num Objeto que lhe é apresentado se, externamente, forem apresentados precisamente todos os passos para realizar tal transformação.

Como exemplo de Ação, o autor afirma que se um estudante não consegue interpretar uma situação de função, a não ser que seja apresentada uma única fórmula para o cálculo dos valores, este aluno está restrito à concepção Ação de uma função. Ele seria capaz apenas de calcular valores de pontos e fazer algumas manipulações da fórmula.

Ainda que a concepção de Ação seja muito limitada, o autor acredita que as mesmas marcam o início do entendimento de um conceito, sendo as atividades iniciais aquelas que ajudariam o estudante a construir Ações.

Sobre o Processo, Dubinsky (1996) afirma que

[...] quando uma Ação se repete e o indivíduo reflete sobre ela, pode se interiorizar em um Processo. Ou seja, se realiza uma construção interna que executa a mesma Ação, mas agora não necessariamente dirigida por um estímulo externo. Um indivíduo que tem uma concepção de Processo de uma transformação, pode refletir sobre ela,

descrever, ou inclusive inverter os passos da transformação sem realizar a realidade dos passos” (DUBINSKY, 1996, p.34).

O indivíduo que já interiorizou a Ação num Processo, o tem como algo interno controlado por ele mesmo e que não necessita de indicações externas para realizar transformações no Objeto.

Exemplificando o Processo, comenta que um indivíduo que entende as funções no conceito de Processo é capaz de pensar uma função como algo que pode receber mais que uma única entrada ou valores das variáveis independentes, de realizar uma ou mais operações sobre estas entradas e, ao observar os resultados, consegue compreender tais valores como saídas ou variáveis dependentes. Com o conceito de Processo para as funções, o indivíduo seria capaz de coordenar dois ou mais Processos para obter uma composição ou inverter o Processo e, portanto, estabelecer funções inversas.

Para Dubinsky (1996), em relação ao conceito de Objeto,

quando um indivíduo reflete sobre as operações aplicadas a um Processo em particular, toma consciência do Processo como um todo, realiza aquelas transformações (sejam Ações ou Processos) que podem atuar sobre ele, e pode de fato construir estas transformações, então está pensando neste Processo como um Objeto. Neste caso dizemos que o Processo foi encapsulado num Objeto”. (DUBINSKY, 1996, p. 35)

É importante salientar que, ao realizar Ações ou Processos sobre um Objeto já encapsulado, é necessário desencapsular e voltar o Objeto ao Processo que foi realizado para o obter, com o objetivo de usar suas propriedades ao manipulá-lo.

Ao exemplificar a encapsulação de Processos em Objetos e a desencapsulação de Objetos em Processos ou Ações, o autor cita a necessidade de manipulação das propriedades das funções ao se realizar a soma, o produto ou ao se formar conjuntos de funções.

Ainda que a definição de Objeto seja, de certa forma, simples de se enunciar, o autor comenta que a encapsulação de Processos em Objetos é algo extremamente difícil de se realizar e pouquíssimas estratégias pedagógicas têm sido suficientes para auxiliar os estudantes neste movimento.

Tendo em vista os escritos da teoria de Piaget, Dubinsky (1996) os relaciona com as

situações matemáticas, principalmente, em nível superior. Encontra, porém, alguns obstáculos para fazer esta relação. Um deles seria como realizar, de fato, a transição entre os Objetos físicos em Objetos mentais. Conforme aumenta-se o nível dos conceitos matemáticos, maior será a necessidade de se construir Objetos mentais substitutos realmente efetivos para os Objetos físicos, para que, quando manipulados, possam possibilitar a construção de novas ideias matemáticas.

Outro obstáculo ao relacionar as ideias piagetianas com a matemática superior é que a maior parte das ideias de Piaget provem do desenvolvimento espontâneo. Porém, quanto mais se eleva o nível do conceito matemático, menor é a possibilidade que esta espontaneidade seja continuada. Assim, segundo o autor, é necessário que o professor crie situações que fomentem tal desenvolvimento com profundidade maior que dos níveis elementares presentes nos trabalhos de Piaget.

Desta forma, Dubinsky (1996) elenca as ideias de Piaget que entende serem necessárias para o desenvolvimento do trabalho com as ideias matemáticas:

- Concentrar-se nos mecanismos mediante os quais é realizada o desenvolvimento intelectual. Nisto estão inclusos a abstração reflexiva e a dicotomia desequilíbrio/reequilíbrio;
- Ajudar aos estudantes a construir Ações, interiorizá-las em Processos e as encapsular em Objetos;
- Ajudar os estudantes a tomar consciência das estruturas que têm construído, a conectá-las com os conceitos matemáticos e a fazer construções adicionais para lidar com situações novas;
- Mudar o papel do professor de disseminador de informações para guia e assistente;
- Prestar atenção às vozes dos estudantes, aos seus erros e aos seus êxitos e entender seu pensamento;
- Criar situações que alimentem os estudantes a fazer construções mentais para lidar com as situações dos problemas matemáticos;
- Permitir que os estudantes construam bases sobre a experiência para os conceitos antes de enfrentar o formalismo que estrutura os conceitos;
- Dar aos estudantes uma oportunidade de descobrir os conceitos antes

que sejam explicados, seja por outros estudantes ou pelo professor;

- Estabelecer um ambiente no qual os estudantes tenham oportunidade de interações ricas, tanto com outros estudantes quanto com o professor. (DUBINSKY, 1996, p. 29)

Tendo sido observadas as ideias citadas na lista anterior, o autor propõe um método pedagógico para atingir tais metas, contendo três principais componentes: investigação da aprendizagem, o ciclo de ensino ACE e a aprendizagem cooperativa.

A investigação da aprendizagem consiste em realizar um trabalho profundo, principalmente qualitativo, diretamente com os alunos para entender como estão pensando ao tentar dar sentido a uma situação matemática. Já o ciclo ACE é uma estrutura composta por Atividades, com tarefas projetadas para promover a abstração reflexiva; discussão em Classe, no qual os alunos desenvolvem, discutem sobre as tarefas dadas pelo professor e, finalmente, Exercícios, que são problemas considerados padrão para reforçar as atividades já trabalhadas. A aprendizagem cooperativa vai permear todas as atividades e exercícios, por meio de grupos permanentes de trabalho ao longo do curso, para propiciar um ambiente social que pode melhorar gradativamente o entendimento dos alunos

Considerações Finais

É importante observar que na abstração reflexiva, as propriedades dos objetos não residem nos próprios objetos, mas dependem das ações executadas por um indivíduo sobre este objeto, sendo as mesmas dependentes tanto dos objetos quanto do entendimento do indivíduo sobre o objeto.

Assim, percebe-se que a teoria APOS pode ser um instrumento eficiente tanto para analisar como um indivíduo constrói o conhecimento matemático assim como um método de ensino que facilita a aprendizagem dos alunos em sala de aula.

Vale ressaltar, entretanto, que apesar de ter sido apresentada de modo linear e progressivo, a teoria APOS não se desenvolve obrigatoriamente nesta ordem, de um estágio a outro. O indivíduo pode ir e voltar ao estágio que julgar necessário para solucionar o que determinada situação exige.

Ainda que a teoria APOS tenha sido elaborada como foco no mensamente matemático avançado, e conseqüentemente para o ensino superior, entendemos que as mesmas ideias podem ser consideradas nos estudos relativos ao nível básico, uma vez que o este

tipo de pensamento, ainda que de forma mais simples e elementar, já se apresenta em diversas situações.

Referências

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1999

DUBINSKY, E. Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. In: **Educación Matemática**, v.8, n. 3, p. 24-41, 1996. Disponível em <http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol8/3/04Dubinsky.pdf>. Acesso em 29 jan. 2019.

FERREIRO, E. Aplicar, replicar, recrear. Acerca de las dificultades inherentes a la incorporación de nuevos objetos al cuerpo teórico de la teoría de Piaget. **Substratum**, v.3, nº 8-9, 1996.

FREITAS, M.T.A. de. **Vygotsky e Bakhtin: Psicologia e Educação: um intertexto**. São Paulo: Editora Ática, 2000.

JAPIASSU, H. **Introdução ao pensamento epistemológico**. 2. ed. Rio de Janeiro: F. Alves, 1977.

LA TAILLE., Y. Prefácio. In, PIAGET, J. **A construção do real na criança**. 3.ed. São Paulo: Editora Ática, 2003.

WERNECK, V. R. Sobre o processo de construção do conhecimento: O papel do ensino e da pesquisa. **Revista Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação**, v.14, n.51, p. 173-196, 2006. Disponível em <http://www.scielo.br/pdf/ensaio/v14n51/a03v1451.pdf> . Acesso em 15 jul. 2019