

Al-Biruni e as relações entre os lados e ângulos de triângulos aplicadas à esfera e ao plano: Uma proposta de atividade didática direcionada a formação de professores de matemática

FRANCISCO NETO LIMA DE SOUZA¹

GISELLE COSTA DE SOUSA²

GABRIELLA LUCHEZE DE OLIVEIRA LOPES³

Resumo

*Centrado no estudo da História da Matemática (HM), mais precisamente na História da Matemática Islâmica do período Medieval, este trabalho é fruto de uma pesquisa de mestrado em andamento que tem como objeto de estudo uma carta escrita por al-Biruni no século XI encontrada no livro *Beyruni'ye Armagan*, mais precisamente no capítulo escrito pelo Dr. Aydin Sayili (1913-1993). Apresentaremos as três fases de desenvolvimento da pesquisa, a saber: construção da matriz teórica do trabalho; elaboração do produto educacional; planejamento da aplicação do produto educacional e coleta, organização e análise dos dados. Como resultados, trazemos uma proposta de estruturação do trabalho dissertativo, apresentaremos o objeto de estudo da dissertação e apontaremos alguns resultados parciais já alcançados.*

Palavras-chave: *Al-Biruni; versões rudimentares da lei dos senos; atividades-históricas-com-tecnologia.*

Abstract

*Centered on the study of the History of Mathematics (HM), more precisely on the History of Islamic Mathematics of the Gothic period, this work is the result of an ongoing master's research that has as its object of study an English version of the letter written by al-Biruni in the eleventh century found in the book *Beyruni'ye Armagan* published in 1974 in the chapter written by Dr. Aydin Sayili (1913-1993). We present four stages of research development, namely: Construction work theoretical matrix; preparation of educational product; application of educational product and, finally, the collection, organization and analysis of data. As results, we bring a proposal for structuring the dissertation work, we will present the object of study of the dissertation and point out some partial results already achieved.*

Keywords: *Al-Biruni; Rudimentary versions of the law of sines; Historical-activities-with-technology.*

¹ Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática – e-mail: francisco.neto.105@ufrn.edu.br.

² Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática – e-mail: giselle.sousa@ufrn.br.

³ Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática – e-mail: gabriela@ccet.ufrn.br.

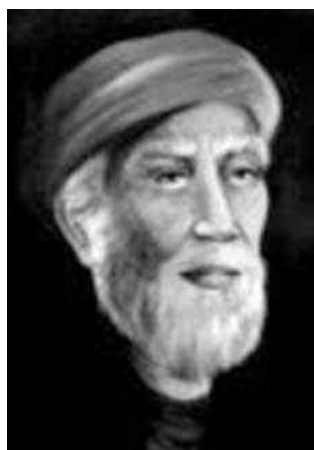
1 Situando o trabalho

Este artigo é fruto de um estudo de mestrado em andamento vinculado ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Temos como objetivo principal apresentar como se originou e como tem se desenvolvido a pesquisa de mestrando apontando alguns resultados parciais que já foram alcançados.

O início da pesquisa se deu durante a minha graduação em Licenciatura em Matemática na UFRN, inicialmente, no Programa de Educação Tutorial (PET) – subgrupo Matemática – no período de 2017.1 a 2018.2, e, na sequência, no projeto de Iniciação Científica (IC) intitulado *Al-Biruni e sua Matemática*, vinculado à Pró-reitoria de Pesquisa da UFRN, finalizado em 2019.2.

Os três anos de atividades de iniciação científica, divididas nos projetos mencionados antes, foram dedicados ao estudo de um personagem de proeminente contribuição para o desenvolvimento da ciência Islâmica do período Medieval. Trata-se de *Abu Rayhan Muḥammad ibn Aḥmad al-Biruni*, ou simplesmente al-Biruni como é mais conhecido, que foi um estudioso que explorou diversas áreas do conhecimento e hoje, sendo mais conhecido, por contribuições ao campo de conhecimento que entendemos por Astronomia. Ele nasceu em 15 de setembro de 973 em uma região adjacente ao Mar de Aral conhecida por Khwarazm e morreu em 13 de dezembro de 1048, aos 75 anos, em Gásni, no Afeganistão.

Figura 01 - al-Biruni(973-1048)



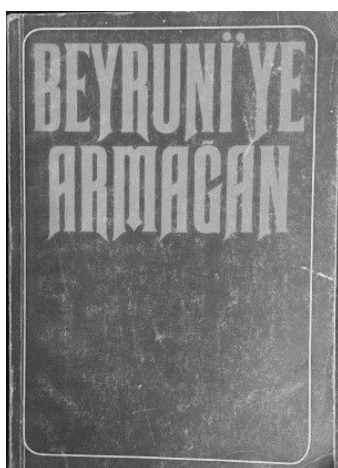
Fonte:O'Connor e Robertson (1999)

A experiência de pesquisa no âmbito da IC compreendeu basicamente três fases de exploração que estiveram intimamente relacionadas. Na primeira delas, estudamos os aspectos contextuais e biográficos de al-Biruni, com vistas a entender melhor esse estudioso, o contexto de produção que ele estava inserido e, sobretudo, quais eram suas contribuições para a Matemática. Essa primeira etapa, se consolida no trabalho intitulado *al-Biruni no mundo Islâmico Medieval e suas contribuições para Matemática*. (SOUZA; SOUSA, 2017)

A segunda fase, envolve uma catalogação de trabalhos disponíveis de al-Biruni. Para tanto, tivemos como ponto de partida o site *MacTutor* e a partir do cruzamento de várias referências tivemos algumas obras catalogadas nas mais variadas áreas de conhecimento. Tendo em vista o volume de arquivos encontrados, organizamos esses em um estado da arte cujo *corpus* se encontra no trabalho de Souza e Sousa (2018).

A varredura mencionada na fase dois nos levou ao livro *Beyruni'ye Armagan*, onde encontramos uma versão transcrita de uma carta escrita em árabe por al-Biruni e traduzida para o inglês e turco por Dr. Aydın Sayılı no capítulo intitulado *Al Beyruni's Letter on Abu Nasr Mansur's Demonstration of the Sine Law* que ocupa as páginas 183 a 197.

Figura 1 -capa do livro em que se encontram as três versões do tratado



Fonte: Sociedade Histórica da Turquia (1974, capa).

A carta encontrada no livro apresentado na figura 2 foi escolhida para ser estudada com mais profundidade, esse momento marca o início da terceira fase. A escolha se deu pela íntima relação do conteúdo presente na carta com a Matemática, se tratando de uma Geometria não euclidiana que se assemelha, em um primeiro momento, com a conhecida lei dos senos⁴ que temos hoje na Trigonometria. A Investigação da carta, enquanto uma continuidade da fase três da iniciação científica, se dá agora no âmbito de uma pesquisa de mestrado profissional que a tem como principal objeto de estudo.

A nossa principal fonte de referência, Saylin (1974), sugere algumas nomenclaturas para o estudo que al-Biruni empreendeu, entendendo que o trabalho de al-Biruni, no século XI, se trata de uma Geometria não-euclidiana, mais especificamente, de uma Trigonometria Triangular Esférica⁵.

Consideramos que essa nomenclatura não é a mais adequada por dois motivos. O primeiro deles, é que a palavra Trigonometria, com o sentido de campo de conhecimento, surge apenas no século XVI com o alemão Bartholomeo Piticus (1561-1613) (PEREIRA, 2010; COUTINHO, 2015; QUINTANA, 2020) e o segundo, é que a palavra *Esférica*, faz referência a um tipo de Geometria sistematizada por Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866) e denominada como Geometria Esférica, por Felix Christian Klein (1849-1925) somente no século XIX. (SILVA, 2014; ABREU, 2015) Esses fatos não possibilitam levantar a afirmativa que o documento contém Trigonometria, Geometria Esférica ou mesmo, uma Trigonometria Triangular Esférica.

Assim, na tentativa de se despir da lente que olha o passado a partir do presente, optamos por se referir a Geometria não-euclidiana refletida no conteúdo do documento como sendo *relações entre os lados e ângulos de triângulos aplicadas à esfera e ao plano*. Cabe ressaltar que esse termo é empregado para conjugar uma estrutura de raciocínio matemático que de fato se assemelha a Lei dos senos que conhecemos, mas que ao mesmo tempo, não pode ser vista como um rudimento da mesma, pois é refletida de uma forma singular no documento histórico, tendo sua forma de apresentação e registro de conteúdo diferenciada.

⁴A lei dos senos é uma relação matemática de proporção que determina que num triângulo qualquer, o quociente entre o lado e o seno do ângulo oposto a esse, é sempre uma constante para os três casos possíveis em um triângulo.

⁵Área da Geometria Esférica que estuda os triângulos que se formam sobre a superfície das esferas, em especial as relações que envolvem ângulos esféricos e arcos esféricos.

O âmbito de desenvolvimento do trabalho, vinculado a um programa de mestrado profissional, regimenta que é necessário desenvolver “um processo ou produto instrucional e utilizá-lo em condições reais de sala de aula ou de espaços não-formais ou informais de ensino, relatando os resultados dessa experiência”. (CAPES, 2012, p. 2) Nesse sentido, aliado a pesquisa histórica e a partir dela, desenvolveremos um material instrucional, mais precisamente um caderno de atividades que tem como base para sua elaboração o documento supracitado e é amparado, em termos de referencial, na *Interface* entre História da Matemática e Ensino (SAITO; DIAS, 2013) e na Aliança entre História da Matemática (HM), Tecnologias Digitais (TD) e Investigação Matemática (IM) de Sousa (2020, 2021).

Englobamos com essa proposta uma sequência de atividades didáticas e um manual de orientações aos professores de modo a propor o estudo das relações entre os lados e ângulos de triângulos aplicadas à esfera e ao plano a partir da abordagem histórica da carta de al-Biruni para que seja possível responder *quais conhecimentos matemáticos são mobilizados na construção e aplicação de uma atividade didática pensada a partir da articulação entre História e Ensino propiciada pela aliança entre HM, TD e IM?*

Sob a influência dos pontos antes mencionados, o objetivo geral da dissertação é *estabelecer conexões entre as Histórias da Matemática presentes na carta de al-Biruni com Aliança entre HM, TD e IM na perspectiva da interface entre História e ensino por meio de um produto educacional*. Haja vista tal anseio, elaboramos quatro objetivos específicos, intimamente relacionadas e que acontecem de forma concomitante, para que o objetivo geral posto seja alcançado e, por consequência, a resposta para a questão foco do trabalho seja observada.

O primeiro objetivo específico é *estudar aspectos relacionados a al-Biruni, a sua produção e o contexto no qual ele e sua obra estão inseridos*. Consideramos esse momento de suma importância, pois é aqui que encontramos bases para a construção de uma narrativa mais contextualizada do documento, situando a história do passado no passado e elucidando o contexto de relações sociais, políticas, religiosas e econômicas que envolvem e materializam a produção da carta.

O segundo objetivo específico é *fazer um estudo do conteúdo matemático da carta*, consideramos necessário se aprofundar nas relações matemáticas apresentadas no documento, entendendo as notações e tomando conhecimento do objeto de estudo da

Matemática presente na carta, pois ele é uma fonte de ideias, significados e aplicações. Depois de conhecer o documento, esperamos que a análise histórica e matemática contemplada nos dois objetivos listados anteriormente, possa nos guiar para o terceiro objetivo específico que é *extrair as potencialidades didáticas do documento para uso na formação de professores de Matemática*.

Elencamos como quarto e último objetivo específico do nosso trabalho *articular a Aliança entre HM, TD e IM com a Interface entre HM e Ensino para a elaboração de um caderno de atividades*, considerando que tanto a Aliança quanto a Interface são fundamentos preocupados prioritariamente com o ensino, no entanto, consistem em propostas inicialmente distintas, de modo que é necessário estudar suas bases indicando os pontos de convergência e complementariedade para que se possa ter confiança que elas podem ser articuladas conjuntamente em prol do ensino da Matemática.

Ficando claro os pontos colocados que caracterizam o nosso trabalho, encaminhamos, na próxima sessão, as justificativas que temos para o desenvolvimento de uma proposta dessa natureza, a saber: as Geometrias não-euclidianas na formação do Professor de Matemática, a escassez das contribuições islâmicas no rol de assuntos da HM e por último, mas não menos importante, a carência e necessidade de fomento de trabalhos na direção da aliança entre HM, TD e IM.

2 Justificativa

Apesar da Geometria ser um dos ramos da Matemática que mais permite a aproximação da disciplina com o mundo real, vemos, a partir da experiência docente que as potencialidades das Geometrias não-euclidianas são pouco exploradas pelos professores em suas aulas, prioritariamente, só a Geometria Euclidiana tem sido trabalhada (LEIVAS, 2013).

Pavanelo (1993), Lorenzato (1995), Bonete (2000), Prestes (2006), Leivas (2013) e Leivas, Portella e Souza (2017) exemplificam vozes de pesquisadores que, durante quase trinta anos, trouxeram à tona a ausência das Geometrias não-euclidianas no currículo ao mesmo tempo que reconhecem a importância desse tópico no âmbito da formação de professores, bem como da Educação Básica. Contudo, reconhecemos que já há iniciativas na direção desse reconhecimento, a exemplo de Pereira (2010), mas consideramos que há carência de fomento de exemplares similares.

Cientes desses pressupostos, criamos com esse trabalho, uma oportunidade para a

inclusão de conceitos relativos a essa área de conhecimento na formação de professores de Matemática.

Consideramos necessário que esse público seja oportunizado a uma reflexão sobre alguns aspectos da Geometria não-euclidiana, ao mesmo tempo que incorporam ao seu repertório formativo questões de base Filosófica, Epistemológica e Axiológica que tangem a construção do saber de modo a ressignificar os seus conhecimentos para que possam propor ações em sua sala de aula da Educação Básica, tida aqui também como uma preocupação.

Ou seja, apesar de o trabalho ser direcionado para a formação inicial no caso dos discentes do curso de Matemática e continuada para os já então professores de Matemática, a reflexão sobre o processo de construção do conhecimento por parte desse público pode se desdobrar dentro da sala de aula com a emergência de um novo discurso didático que (re)organiza o significado da Matemática e, por consequência, do seu ensino. Com isso, aproximamos as preocupações desse trabalho, também, com as carências no ensino de Matemática na sala de aula da Educação Básica, considerando que as ações em sala se dão via professor.

Como colocado anteriormente, para o desenvolvimento da proposta usamos, enquanto provedora de reflexões para o ensino, uma carta escrita por al-Biruni que trata de razões entre lados e ângulos de um triângulo aplicadas a esfera e ao plano. A escolha desse documento nos remete a um dos pontos importantes para quem trabalha com História da Matemática Islâmica, as contribuições islâmicas no rol de assuntos da História da Matemática são pouco disseminadas, a dificuldade na obtenção de fontes secundárias nos levaram a perceber a ausência dessas contribuições.

Berggren (1986) coloca que quando se tratamos da Matemática Islâmica, precisamente aquela desenvolvida no do Período Medieval, vemos trabalhos que servem de alicerce para grande parte da Matemática Ocidental, porém se observam poucos registros desta contribuição no rol de assuntos da HM. Souza e Sousa (2018), confirmam a partir de um levantamento de trabalhos a afirmativa colocada antes por Berggren (1986), ressaltando a ausência dessas contribuições, principalmente, em Língua Portuguesa.

Além de estudar HM Islâmica do período medieval, temos preocupações com os fins didáticos que serão dados a essa História. Assim, como uma forma de consolidar a proposta didática, a HM será trabalhada de forma conjunta e harmônica com outras

tendências em Educação Matemática. Com isso, aliamos a historicidade com as TD em uma proposta didática para abordagem dos conteúdos matemáticos mediante investigação e (re)construção histórica, possibilitando o entendimento da Matemática presente na carta de modo a criar situações de aprendizagens a partir dela.

De formas semelhantes, os trabalhos de Oliveira (2014), Alves (2016), Andrade (2017), Silva (2019) e Muniz (2020) lançam um olhar científico e didático a problemas/documentos/episódios históricos e, por meio das TD e da IM e, apresentam a comunidade científica propostas de articulação que se originam nessa mesma direção. No entanto, as possibilidades estão longe de se esgotar, Sousa e Costa (2018), por meio de uma catalogação e posterior análise de trabalhos nos anais de eventos nacionais e internacionais relacionados a Educação Matemática, apontam para a escassez de trabalhos que buscam articular a HM as TD, indicando que trabalhos com essa perspectiva devem ser fomentados no meio acadêmico. Tendo em vista tais justificativas, desenvolvemos um estudo cujos fundamentos seguem apontados na próxima seção.

3 Fundamentos teóricos e metodológicos

Essa seção busca apresentar as bases que norteiam as três etapas de desenvolvimento da pesquisa, a primeira delas se estabelece em um marco mais teórico em que construímos o nosso referencial e tecemos a análise historiográfica, epistemológica e contextual da carta de al-Biruni, a etapa II compreende a elaboração do produto educacional (com base na fase anterior) e por último, na etapa III planejamos a aplicação do produto e a análise dos dados obtidos para a reorganização e refinamento do mesmo bem como apontamento dos resultados da pesquisa.

A *etapa I* da pesquisa foi iniciada com uma pesquisa bibliográfica, Martins e Theóphilo (2016, p. 52) entendem que esse procedimento é uma estratégia de pesquisa que

busca conhecer, analisar e explicar contribuições sobre determinado assunto, tema ou problema. A pesquisa bibliográfica é um excelente meio de formação científica quando realizada independentemente – análise teórica – ou como parte indispensável de qualquer trabalho científico, visando à construção da plataforma teórica do estudo.

Nesse sentido, temos o meio pelo qual obtemos as bases teórico-metodológicas que compõem o nosso referencial. A trajetória metodológica desta etapa se inicia com a

definição dos termos a serem buscados nos livros-texto e na internet, escolhemos como os termos para pesquisa: interface entre História e Ensino e Aliança entre HM, TD e IM. Essa varredura nos levou a livros, artigos, dissertações, teses e periódicos de nível nacional e internacional, podemos citar que alguns dos trabalhos encontrados foram Saito (2015, 2016), Saito e Dias (2009, 2013), Pereira e Saito (2018), Sousa (2020a, 2020b, 2021). Diante dessas fontes, foram realizadas leituras e fichamentos a fim de organizar os dados por meio de estudo e cruzamento de informações de modo a obter um texto que delinea uma base de sustentação teórica da pesquisa.

Essa etapa foi importante, pois a partir dela entendemos que a Interface se trata de “[...] um conjunto de ações e produções que promova a reflexão sobre o processo histórico da construção do conhecimento matemático para elaborar atividades didáticas que busquem articular história e ensino de matemática” (SAITO; DIAS, 2013a, p. 92). No entanto, sem uma metodologia única para elaboração das atividades didáticas, elegemos a Aliança entre HM, TD e IM como sendo o meio pelo qual a interface se manifestará, tendo em vista que Sousa (2021) entende que a Aliança se trata de uma

proposta pedagógica para matemática que se consolida pela investigação de problemas/episódios/temas históricos com apoio das tecnológicas que em prol do ensino e aprendizagem da matemática podem ocorrer via o que chamamos de atividades-históricas-com-tecnologias ou investigação-histórica-com-tecnologia.

Desse modo, consideramos a Aliança como uma possibilidade de Interface entre HM e Ensino que tem apoio da tecnologia ancorada pela investigação, para que isto ocorra, a proposta de aliança deve ser norteada por abordagem historiográfica atualizada⁶. De posse desse constructo, demos continuidade a *etapa I* se envolvendo com a historicidade do tema em questão, pois para que a proposta de atividade didática, apoiada no trabalho de al-Biruni, se efetive há necessidade de realizar uma apreciação do documento histórico, a carta, e em paralelo conhecer al-Biruni e sua produção com o texto.

Para tanto, tivemos como ponto de partida o site *Mactutor*⁷, a partir dele, acessamos

⁶ Atualmente, existem duas vertentes historiográficas, uma chamada tradicional que Saito (2015, p. 26) define como sendo uma narrativa “meramente discursiva que valoriza apenas o resultado e não o processo de construção do conhecimento matemático” e uma outra conhecida por historiografia atualizada que propõem uma reconstrução histórica que valoriza não só o conteúdo matemático e fazem dos acontecimentos do passado, uma forma de entender o presente, e não o contrário (SAITO, 2015).

⁷ *MacTutor* é um repositório online de biografias científicas da [Universidade de St Andrews, na Escócia](http://www.maths.tcd.ie/~dwilkins/People/Biruni.html). A página contém biografias de cerca de 3.000 matemáticos e mais de 2.000 páginas de ensaios e materiais

outras referências sobre o assunto, chegando aos trabalhos de Scheppler (2006) e Nasr (1987), por exemplo. Vale ressaltar que após a leitura do conteúdo presente no site supracitado, fomos levados a *homepage* da biblioteca de Leiden na Holanda, repositório que contém o documento original da carta. Dessa varredura por fontes históricas inerentes ao nosso tema, obtemos vários trabalhos a exemplo de Nasr e O'Connor (1999) e Robertson (1987), os quais foram analisados e por vezes traduzidos. Desses, obtemos trechos transcritos e imagens digitalizadas que foram organizadas em banco de imagens e quadros de análise cuja apreciação culminou em produção de narrativa historiográfica com aproximação da atualizada a ser usada no produto.

Os procedimentos metodológicos que envolvem a construção da parte histórica do trabalho são entendidos por Kripka *et al* (2015, p. 58) como uma pesquisa documental, método cujos “dados obtidos são estritamente provenientes de documentos, com o objetivo de extrair informações neles contidas, a fim de compreender um fenômeno”. Os arquivos encontrados na pesquisa podem ser tratados como documentos, tendo em vista que são vestígios do passado e, portanto, testemunhas de acontecimentos. (KRIPKA *et al*, 2015)

Assim, fica claro que a *etapa I* compreende esses dois procedimentos de pesquisa postos. A bibliográfica quando estudamos uma literatura secundária em busca de um embasamento teórico para a investigação e a pesquisa documental quando propomos uma elaboração de uma literatura atualizada em português tratando do estudo biográfico de al-Biruni e historiográfico no que diz respeito a carta.

Na sequência, a *etapa II* se utiliza do arcabouço teórico obtido na fase anterior para elaboração do produto educacional, ou seja, a elaboração do caderno de atividades que é fruto da articulação entre a historicidade da carta com Interface entre HM e Ensino propiciada pela Aliança entre HM, TD e IM.

Como veremos adiante, a carta de al-Biruni é composta por seis partes⁸, a saber: saudação inicial, quatro demonstrações e uma saudação final. O primeiro passo para elaboração do produto foi a escolha das partes da carta que poderíamos tratar nas atividades para não ter um produto educacional muito extenso. Da análise do documento e extração das potencialidades didáticas da carta, obtidas na etapa I,

de apoio. Mais informações em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/>.

⁸ Esclarecimentos na seção 4, mais precisamente no Quadro 2.

escolhemos a demonstração 1 e a demonstração 3 para tratar em nosso estudo, pois elas compreendem, dentro da estrutura de apresentação da carta, uma função semelhante ao de um axioma, nesse sentido, elas são provadas de modo independente e usadas como uma aplicação direta para a prova da demonstração 2 e demonstração 4, respectivamente.

Extraímos do estudo histórico subsídios para construção de narrativas que recaíam sobre as razões e circunstâncias que são responsáveis pela existência da carta e tratado nela contido. O contexto social, histórico, político e econômico da civilização Islâmica do período Medieval serviu de base para proposição dos problemas apresentados por meio do caderno de atividades. Vale ressaltar que os textos presentes nas atividades, se aproximaram, sempre que possível de uma narrativa atualizada, assim como sugere a Interface. Além disso, as atividades devem prever elementos da atividade-histórica-com-tecnologia num processo de investigação-histórica-com-tecnologia, previstos na aliança entre HM, TD e IM.

Como a dissertação ainda se encontra em construção, estamos falando de um protótipo de produto educacional que tem prazo de finalização somente em setembro de 2022, até lá, ajustes devem ser feitos mediante as problemáticas de pesquisa que forem surgindo. Apesar disso, nada impede de apresentarmos alguns apontamentos de como planejamos a etapa III, que consiste na aplicação desse material instrucional.

Os procedimentos de aplicação devem estar alinhados aos marcos característicos da pesquisa-ação. Esse tipo de pesquisa é definido por Fiorentine e Lorenzato (2009, p.112) enquanto um “processo investigativo de intervenção em que caminham juntas prática investigativa, prática reflexiva e prática educativa”. Ou seja, temos a pesquisa realizada em íntima associação com a investigação, o que nos permite trazer significado a dimensão da ação por partes dos indivíduos e refletir o seu significado dentro do processo investigativo. Assim, não almejamos que os pesquisados representem apenas números, a intenção é que eles participem da pesquisa de modo ativo a medida em que constroem, significam ou mesmo mobilizam conhecimentos a partir das situações propostas com o caderno.

Daremos seguimento a etapa III fazendo a organização e análise dos dados que devem ser coletados durante a aplicação do produto educacional, para tanto, usaremos para a coleta instrumentos como questionário, fotografias, filmagens e diário de campo.

Esperamos que esses meios técnicos possibilitem captar falas dos alunos, imagens que façam alusão aos argumentos da aliança e/ou interface, anotações dos participantes e registros nas atividades. Os dados obtidos devem ser digitalizados, quando necessário, para que sejam todos organizados em bancos de imagens e quadro comparativos. Posteriormente, faremos a análise dos dados que puderam ser coletados, relacionando as respostas obtidas nos instrumentos com reflexões intrínsecas ao nosso referencial.

Resumindo sumariamente as etapas de desenvolvimento da investigação e a síntese de cada uma delas, apresentamos, enquanto síntese da nossa Metodologia, o quadro 01 colocado a seguir

Quadro 01: síntese do percurso metodológico da pesquisa

ETAPA		OBJETIVO	PROCEDIMENTOS UTILIZADOS	EM QUE CONSISTE ISTO?
TEÓRICA	I	Construir a matriz teórica do trabalho	Bibliográfica	Catálogo e exame de fontes secundárias que tratam sobre o assunto estudado
			Documental	Utilização de um documento histórico enquanto fonte de informação
	II	Elaboração do produto educacional	O produto será elaborado considerando os pressupostos teórico-metodológicos da Interface entre História e ensino (SAITO; DIAS, 2013) e da Aliança entre HM, TD e IM (SOUZA, 2021)	
PRÁTICA (NÃO INICIADA)	III	Aplicação do produto educacional	Pesquisa-ação	Enfatiza a adoção de um papel ativo por parte do pesquisador em uma colaboração plenamente ativa com os participantes do estudo.
		Coleta, organização e análise dos dados	A coleta de dados acontecerá na aplicação do produto educação, usaremos questionário, diário de campo e fotografias enquanto instrumentos de coleta. A análise dos dados dar-se-á por meio de um cruzamento das respostas com o referencial teórico que norteia pesquisa. O referencial teórico é a matriz de referência com que os dados coletados vão ser analisados.	

Fonte: elaborado pelos autores. (2021)

Levando em conta os pressupostos supracitados, apresentamos na sequência alguns desdobramentos da pesquisa em andamento a partir da apreciação da proposta de divisão e estruturação do trabalho escrito incluindo a amostra de alguns frutos colhidos como apreciação preliminar do documento e ainda apontamentos iniciais para o produto a ser produzido.

4 Proposta de Divisão e estruturação do trabalho dissertativo e alguns frutos da pesquisa: resultados parciais

Com vista a responder à pergunta que norteia o trabalho de modo que os objetivos postos sejam alcançados, almejamos estruturar a dissertação em cinco capítulos a contar com uma introdução, que busca registrar sumariamente o estudo, como posto neste artigo, situando a problemática de pesquisa, as motivações que circundam a origem desse projeto, a delimitação de uma questão-foco e dos objetivos, assim como, os aspectos metodológicos e os caminhos que foram escolhidos para realização da investigação.

No segundo capítulo nos preocupamos em trazer o referencial que embasa a pesquisa e dá sustentação a construção do caderno de atividades, produto educacional fruto da dissertação. Com isso, traçamos um panorama das considerações que Saito e Dias (2013) colocam sobre a interface entre HM e Ensino, o mesmo é feito para a Aliança entre HM, TD e IM de Sousa (2021). Para tanto, foi necessário analisar as bases dos referidos estudos e registrar, ainda nesse capítulo, os pontos de convergência e complementariedade entre ambos. Tal investigação encontra-se em andamento, mas resultados parciais apontam para a aliança entre HM, TD e IM ser uma forma de Interface entre história e ensino com a condição de que a HM usada na aliança seja adotada numa perspectiva atualizada e a interface com o ensino possa se dar com apoio das TD via IM.

No seguinte capítulo, o três, daremos conta do arcabouço histórico da dissertação olhando de forma conjunta e integrada para o documento, seu autor e o contexto em que eles estavam inseridos, ou seja, estudamos al-Biruini e seu contexto a partir do texto histórico. Em correspondência com nossa proposta, nesse momento ressaltamos as potencialidades didáticas que emergem da análise histórica e matemática do documento.

Como resultado parcial desse capítulo, podemos apontar que análise da carta tem uma estrutura de apresentação que é composta por uma saudação inicial, quatro demonstrações e saudação final. Todas essas partes são organizadas em parágrafos e apresentadas de forma retórica, ou seja, o texto é colocado na forma de um manuscrito e se utiliza de uma linguagem matemática escrita, não contendo símbolos e notações matemáticas atuais. Algumas apreciações preliminares dessas partes em que a carta se

divide estão colocadas no quadro 02 que segue.

A partir da análise histórica, esperamos que possam ser encontradas potencialidades didáticas, para que as atividades didáticas sejam elaboradas como sugere a interface. Uma potencialidade que emergiu do documento tange a necessidade de sua criação. Porque alguém no século XI estaria interessado em saber as distâncias e ângulos formados na superfície de uma esfera? A verdade é que a Geometria criada nesse momento diz respeito a necessidades práticas, e com a carta, não era diferente. Todo Muçulmano deve orar cinco vezes ao dia com sua cabeça voltada em direção à Meca⁹, nesse sentido, saber ângulos e distâncias entre pontos na esfera poderia ajudar a determinar qual a direção correta em que as mesquitas precisariam estar. Além disso, a expansão do império islâmico implicava, por exemplo, em necessidade de orientação para a direção dos territórios a serem conquistados, bem como, demarcação dos mesmos.

Quadro 02: esclarecimentos sobre as partes da carta

PARTE DA CARTA	APONTAMENTOS INICIAIS
Saudação inicial	É o primeiro parágrafo da carta. Al-Biruni (973-1048) afirma trazer à tona contribuições de Abu Nasr (960-1036). Faz referência a Alá, explicitando indícios de relações do autor com questões de natureza teológica.
1ª demonstração	Nesse caso, al-Biruni traz relações entre lados e ângulos de um triângulo esférico ABG que tem $A = 90^\circ$. Ele afirma que o quociente entre os senos dos arcos (que correspondem aos lados do triângulo esférico) é igual a razão dos senos dos ângulos formados pelos lados do triângulo esférico.
2ª demonstração	A demonstração se divide em dois casos que se originam a partir do triângulo ABG. No primeiro temos o ângulo A agudo, ou seja, $0^\circ \leq A < 90^\circ$, enquanto que na segunda, temos o mesmo ângulo A obtuso, com medida de A variando de 90° até 180° . A mesma relação que consta na demonstração 1 é válida para os dois casos. Vale ressaltar que é feita uma construção nas figuras que permite o uso direto da demonstração 01.
3ª demonstração	Traz esclarecimentos para expressão “o seno de tal e tal ângulo”, termo que é usado no decorrer da carta. Apresenta a demonstração da relação entre lados e ângulos em um triângulo ABG, afirmando a mesma relação da demonstração 01, no entanto, para o triângulo ABG plano. A demonstração se divide em duas partes, a primeira delas para o caso de o triângulo ter $G = 90^\circ$ e a segunda delas, para quando G é um ângulo agudo.
4ª demonstração	Compreende uma apresentação que seria uma continuação da 3ª demonstração. al-Biruni traz o caso em que a lei dos senos é validada para um triângulo ABG obtuso em

⁹Cidade localizada na Arábia Saudita e considerada sagrada pelos Muçulmanos. Em Meca está localizado o Santuário Kabah, lugar que, segundo o Islã, é o único da terra a ser tocado por forças celestiais. Vale ressaltar que em Meca nasceu e está enterrado o profeta Maomé.

	G. A forma de demonstração se dá por uma construção que permite o uso direto do caso em que ABG tem G medindo 90° .
Saudação final	Último parágrafo da carta. Deixa claro que o autor da carta é o al-Biruni. Indica uma pessoa chamada de Abû Said como destinatário.

Fonte: elaborado pelos autores (2021)

A seguir, como resultado da articulação entre os dois capítulos anteriores, surgirá o quarto capítulo. Nele, apresentamos o produto com apontamentos de sua produção bem como detalhamento de sua aplicação e análise resultante à luz dos referenciais adotados. Como a análise do documento não está finalizada, a elaboração do produto ainda não foi concluída, como também sua aplicação não foi iniciada. Apesar disso, temos previsão de aplicação em um curso de extensão, com vistas a oportunizar a participação aos alunos dos cursos de Licenciatura ou Bacharelado em Matemática, bem como professores que lecionem o componente curricular Matemática na Educação Básica.

Apresentamos uma lista de itens previstos que constarão na proposta de produto educacional cujo título provisório é *al-Biruni e as relações entre os lados e ângulos de triângulos: propostas de atividades-históricas-com-tecnologia*.

Figura 03 – lista de itens do produto

- 1 PROPOSTA E ORGANIZAÇÃO DO CADERNO DE ATIVIDADES**
- 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS DO CADERNO E DAS ATIVIDADES**
- 3 ELABORANDO AS ATIVIDADES**
- 4 ORIENTAÇÕES GERAIS PARA OS PROFESSORES**
- 5 OBJETIVOS DO CADERNO**
- 6 SUGESTÕES DE MATERIAIS COMPLEMENTARES**
- 7 ATIVIDADES**
 - 7.1 Atividade I – Quem foi al-Biruni e quais as suas contribuições para a Matemática?**
 - 7.2 Atividade II – A orientação para Meca**
 - 7.3 Atividade III – Lidando com um desafio**
- 5 Expectativas de Respostas**
- 6 Referências Bibliográficas**

Fonte: elaborado pelos autores (2021)

As atividades que constarão no produto educacional partem da abordagem didática da carta escrita por al-Biruni, e com auxílio das TD (GeoGebra) via IM, devem se efetivar no que Sousa (2020a) coloca como atividades-históricas-com-tecnologia. Com o intuito de otimizar as atividades propostas, vamos buscar, sempre que possível, uma

aproximação com a abordagem historiográfica atualizada colocada por Saito (2019) como essencial para uma interface entre HM e ensino como é o caso da aliança em que nos ancoramos.

A figura 03 exibe os itens do produto educacional que prevê contemplar três atividades, a seguir, apresentamos, como um outro resultado parcial do produto educacional, um possível cronograma para aplicação das atividades indicando o tempo de realização de cada uma delas.

Quadro 03: Possível cronograma de aplicação

Atividade a ser realizada	Tempo de duração da atividade
Textos introdutórios e questionamentos iniciais	60 min
Atividade I - Quem foi al-Biruni e quais as suas contribuições para a Matemática?	120 min
Atividade II – A orientação para Meca	240 min
Atividade III – Lidando com um desafio	180 min

Fonte: Elaborado pelos autores (2021)

Finalizando, no capítulo cinco, traremos as considerações finais da pesquisa, momento em que analisamos a trajetória que percorremos com a investigação e trazemos uma possível resposta a questão investigada. Considerando que a pesquisa não foi finalizada, ainda não temos apontamentos para este capítulo, mas tecemos adiante algumas ponderações que finalizam a exposição deste artigo.

Considerações Finais

No trabalho em questão, apresentamos uma história que exemplifica como o Islã pode inspirar avanços no conhecimento científico das diversas áreas de conhecimento. al-Biruni, estudioso pelo qual trazemos a tona parte dessa história, foi importante em seu contexto, sobretudo pelas contribuições aos progressos astronômicos que prepararam o caminho para avanços da Matemática e colaboraram de forma significativa com outros trabalhos que surgiriam mais à frente.

Enquanto fonte de reflexões, a carta ocupou um importante lugar dentro desse trabalho, exemplificando que a produção de materiais didáticos a partir de propostas cujo fio condutor é a HM pode se constituir como uma atividade capaz de mobilizar

conhecimentos, em especiais os matemáticos, que podem trazer para o alunos, sobretudo com o uso da História atualizada, uma compreensão com significado. Assim, além da preocupação histórica os encaminhamentos didáticos que se dariam a partir dela ganham um lugar especial dentro da nossa pesquisa.

No que diz respeito ao referencial que ancora o trabalho, a articulação entre a Interface entre HM e ensino e a Aliança entre HM, TD e IM é um grande desafio, estamos tratando de bases dentro da Educação Matemática que se encontram em construção, articulá-las com esse trabalho implica muito mais em continuidade do que em um fim propriamente dito. Esperamos que esse movimento dialético entre esses dois fundamentos encontrem um ponto de convergência que possibilite o surgimento de novas atividades e propostas para a sala de aula.

A dissertação ainda não foi concluída como ficou claro no decorrer do trabalho, no entanto, os avanços que já foram dados nos permitem perceber que o trabalho por si exige uma continuidade. Como o nosso trabalho está calcado, prioritariamente em questões de ensino, um encaminhamento futuro que já está sendo vislumbrado é a inserção de uma teoria para que os aspectos da aprendizagem das atividades possam ser analisados. Em um primeiro momento, pensamos na Teoria da Objetivação de Luis Radford.

Referências

ABREU, Shyrlene Martins de. **Geometria esférica e trigonometria esférica aplicadas à Astronomia de posição**. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal de São João del-Rei, Ouro Branco/MG, p. 41, 2015.

ALVES, Juliana Maria Schivani. **Dos mínimos quadrados à regressão linear: atividades históricas sobre função afim e estatística usando planilhas eletrônicas**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, p. 305, 2016.

ANDRADE, Luciana Vieira. **História da matemática e tecnologias da informação e da comunicação no ensino de função**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, p. 250, 2017.

BERGGREN, John Lennart. **Episodes in the Mathematics of Medieval Islam**. New York: Springer, 1986.

Boletim Cearense de Educação e História da Matemática, Fortaleza/CE, v. 5, n. 14, p. 253–263, 2018. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/232>. Acesso em: 02 fev.

2021.

BONETE, Izabel Passos. **As Geometrias não-euclidianas em cursos de licenciatura: algumas experiências.** Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas/Universidade Estadual do Centro-Oeste. Campinas-SP/Guarapuava-SP, p. 240. 2000.

COUTINHO, Lázaro. **Trigonometria esférica: a Matemática de um espaço curvo.** 1.ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2015.

DIAS, Marisa da Silva; SAITO, Fumikasu. Interface entre história da matemática e ensino: uma aproximação entre historiografia e perspectiva lógico-histórica. In: IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2009, Brasília. **Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática.** Brasília: SBEM, 2009.

FIORENTINI, Dário; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos.** Campinas: Autores Associados, 2009.

KRIPKA, Rosana Maria Luvezute; SCHELLER, Morgana; BONOTTO, Danusa de Lara. Pesquisa documental na pesquisa qualitativa: conceitos e caracterização. **Revista de investigaciones UNAD**, v. 14, n. 2, p. 55-73, 2015. Disponível em: <https://core.ac.uk/download/pdf/322589335.pdf>. Acesso: 24 de mai. 2021.

LEIVAS, José Carlos Pinto. Geometrias não-Euclidianas: ainda desconhecidas por muitos. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.15, n.3, p.647-670, 2013. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/16187/pdf>. Acesso em: 01 abr. 2021.

LEIVAS, José Carlos Pinto; SOUZA, Helenara Machado de; PORTELLA, Hiago Portella de. Geometrias Não-Euclidianas: uma investigação na Escola Básica no Brasil com GeoGebra. **Revista Thema.** Rio Grande do Sul, v. 14, n. 3, p. 210-221, 2017. Disponível em: <http://periodicos.ifsul.edu.br/index.php/thema/article/view/460/571>. Acesso em: 15 de mar. 2021.

LORENZATO, Sérgio. Por que não ensinar Geometria? **A Educação Matemática em Revista.** São Paulo, v. 3, n. 4, p. 3-13, jan./jul., 1995. Disponível em: <https://docero.com.br/doc/nv55s5>. Acesso em: 05 abr. 2021.

MARTINS, Gilberto de Andrade; THEÓPHILO, Carlos Renato. **Metodologia da investigação científica para ciências sociais aplicadas.** 3. ed. São Paulo: Atlas, 2016.

MUNIZ, Jéssica Targino. **Soluções de equações quadráticas por 'Abd al Hamid Ibn Turk na formação inicial do professor de matemática: uma perspectiva orientada pela história da matemática.** 2019. 246f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2020.

NASR, Seyyed Hossein. **Science & Civilization in Islam.** Cambridge, Reino Unido: Sociedade de Textos Islâmicos, 1987.

O'CONNOR, John J.; ROBERTSON, Edmund F. Abu Arrayhan Muhammad ibn Ahmad al-Biruni. **MacTutor History of Mathematics archive**, Escócia, nov. 1999. Disponível em: <http://www-history.mcs.standrews.ac.uk/Biographies/Al-Biruni.html>. Acesso em: 27/03/2021.

OLIVEIRA, José Damião Souza de. **A Geometria do compasso (1797) de Mascheroni (1750 – 1800) em atividades com o GeoGebra.** Dissertação (Mestrado Profissional em

Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, p. 223, 2014.

PAVANELLO, Regina Maria. O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetike**, Campinas/SP, v. 1, n. 1, p. 7-17, jan./dez., 1993. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646822/13724>. Acesso em: 17 abr. 2021.

PEREIRA, A. C.; SAITO, F. Os instrumentos matemáticos na interface entre história e ensino de matemática. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 5, n. 14, p. 109 - 122, 25 ago. 2018.

PEREIRA, Ana Carolina Costa. **A obra de triangulis omnimodis libri quinque de Johann Müller Regiomontanus (1436 1476):** uma contribuição para o desenvolvimento da trigonometria. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, p. 342, 2010.

PRESTES, Irene da Conceição Rodrigues. **Geometria esférica:** uma conexão com a geografia. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, p. 210, 2006.

QUINTANA, César Dias. **A importância do conhecimento da Trigonometria Esférica na formação do Bacharel em Ciências Náuticas.** Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, p.81, 2020.

SAITO, F.; DIAS, M. S. Interface entre história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 19, n. 1, p. 89-111, 2013.

SAITO, Fumikazu. Construindo interfaces entre história e ensino da matemática. **Ensino da Matemática em Debate**, v. 3, n. 1, p.03-19, 2016.

SAITO, Fumikazu. **História da matemática e suas (re)construções contextuais.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

SAITO, Fumikazu; DIAS, Marisa da Silva. Interface entre História da Matemática e Ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século xvi. **Ciência & Educação**, Bauru/SP, v. 19, n. 1, p. 89-111, 2013. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/ciedu/v19n1/07.pdf>. Acesso em: 15 jan. 2021.

SAYLI, Aydin. Al Beyruni's Letter on Abu Nasr Mansur's Demonstration of the Sine Law. *In: Sociedade Histórica da Turquia. (org.). Beyruni'ye Armagan.* Ancara: Türk Tarih Kurumu Basimevi, 1974. p. 183-197.

SAYLI, Aydin. Al Beyruni's Letter on Abu Nasr Mansur's Demonstration of the Sine Law. *In: Sociedade Histórica da Turquia. (org.). Beyruni'ye Armagan.* Ancara: Türk Tarih Kurumu Basimevi, 1974. p. 183-197.

SCHEPPLER, Bill. **AL-BIRUNI Master Astronomer and Muslim Scholar of the Elevery Century.**New York: The Rosen Publishing Group, 2006.

SILVA, Alison Luan Ferreira da. **História da matemática, tecnologias digitais e investigação matemática no ensino de unidades temáticas de matemática da BNCC para o 8º ano.** 2019. 246f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2019.

SILVA, Everaldo Raiol da. **O surgimento das trigonometrias em diferentes culturas e as relações estabelecidas entre elas**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Universidade Federal do Pará, Belém, p. 210, 2014.

SOUSA, G. C. de. Aliança entre HM, TDIC e IM: Fundamentos e Aplicações. **REMATEC**, Belém/PA, v. 15, p. 117-136, 2020. Disponível em: <http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/239>. Acesso em: 23 abr. 2021.

SOUSA, Giselle Costa de. **Aliança entre História da Matemática e Tecnologias via Investigação Matemática: reflexões e práticas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2020b.

SOUZA, G. C. Experiências com GeoGebra e seu papel na aliança entre HM, TDIC e IM. **REMATEC**, Belém/PA, v. 16, n. 37, p. 140-159, Mês-Mês, 2021. DOI: <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n37.p140-159.id310>

SOUSA, Giselle Costa de. Aliança entre HM, TDIC e IM: fundamentos e aplicações. **REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, Ano 15, Fluxo Contínuo, p. 117-136. (2020a)

SOUSA, Giselle Costa de. Experiências com GeoGebra e seu papel na aliança entre HM, TDIC e IM. **REMATEC**, Belém/PA, v. 16, n. 37, p. 140-159, 2021. Disponível em: <http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/310>. Acesso em: 01 mar. 2021.

SOUSA, Giselle Costa de; COSTA, Allyson Emanuel Januário da. Investigando a conjunção entre História da Matemática e Tecnologias de Informação e Comunicação, por meio de um levantamento bibliográfico em eventos internacionais de educação matemática. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 4, n. 11, p. 6–21, 2018. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/37>. Acesso em: 22 abr. 2021.

SOUZA, F. N. L. de; SOUSA, G. C. de. AL-BIRUNI E SUA MATEMÁTICA.

Souza, Francisco Neto Lima de; Sousa, Giselle da Costa. al-Biruni no mundo Islâmico Medieval e suas contribuições para Matemática. *In: Encontro Regional de Educação Matemática*, VI., 2017, Mossoró/RN. **Anais...Mossoró/RN: EDUFERSA**, 2017. p. 198-209.