

Algumas reflexões didáticas no ensino de matemática a partir da análise de uma carta de Thabit Ibn Qurra (836-901) direcionada a um amigo

ALLYSON EMANUEL JANUÁRIO DA COSTA¹

GISELLE COSTA DE SOUSA²

MARTA FIGUEREDO DOS ANJOS³

Resumo

Este trabalho é um recorte de uma pesquisa de mestrado e uma reflexão sobre o Produto Educacional fruto dessa pesquisa em andamento, que versa sobre a Matemática Islâmica Medieval, e o apoio que as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) podem fornecer ao entendimento da História da Matemática (HM), via Investigação Matemática (IM) em favor do ensino de Matemática. Tal investigação toma como ponto de partida, uma carta do estudioso islâmico Thabit ibn Qurra (836 d. C. – 901) direcionada a um amigo, em que apresenta uma Generalização do Teorema de Pitágoras aplicado a quaisquer triângulos. A partir de um levantamento bibliográfico para esse estudo histórico, fizemos algumas reflexões didáticas sobre tal documento e levamos para o Produto Educacional, destacando as possibilidades didáticas da aliança entre HM, TDIC, via IM, no ensino de Matemática.

Palavras-chave: *Generalização do teorema de Pitágoras; matemática islâmica; aliança entre HM, TDIC e IM.*

Abstract

This work is an excerpt from a master's research and a reflection on the Educational Product resulting from this research in progress, which deals with Medieval Islamic Mathematics, and the support that Digital Information and Communication Technologies (DICT) can provide to the understanding of the History of Mathematics (HM), via Mathematical Investigation (MI) in favor of the teaching of Mathematics. This investigation takes as a starting point a letter of the Islamic scholar Thabit ibn Qurra (836 AD. - 901) addressed to a friend, in which he presents a Generalization of the Pythagorean Theorem applied to any triangles. From a bibliographic survey for this historical study, we did some didactic reflections on this document and we take it to the Educational Product, highlighting the didactic possibilities of the alliance between HM, TDIC, via IM, in the teaching of Mathematics.

Keywords: *Generalization of Pythagorean Theorem; Islamic Mathematics; Aliance between HM, TDIC and IM.*

¹ Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática – e-mail: allysoncosta@gmail.com.

² Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática – e-mail: giselle.sousa@ufrn.br.

³ Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática – e-mail: martafiguereado@yahoo.com.br.

Introdução

O presente trabalho se configura em um recorte da minha pesquisa de mestrado, em curso, com o título: *Thabit Ibn Qurra (836-901) e a Generalização do Teorema de Pitágoras: Aliando História, Tecnologia e Investigação no Ensino de Matemática*, Costa (2021a, no prelo). Esta pesquisa está na área Matemática Islâmica Medieval (campo de investigação da História da Matemática), ao desenvolver um estudo sobre a generalização do teorema de Pitágoras⁴ feita pelo estudioso islâmico Thabit ibn Qurra, no século IX, a partir da análise de uma carta de sua autoria e direcionada a um amigo⁵ em que esse tratado está presente. Além desse estudo, nessa pesquisa de mestrado, ainda buscamos aliar a História da Matemática (HM) às Tecnologias Digitais (TD), sob o olhar da Investigação Matemática, voltada para o Ensino de Matemática. Essa aliança proposta se conceberá através do estudo da generalização do teorema de Pitágoras proposto por Thabit ibn Qurra (836-901), assim como no auxílio que as TDIC podem propiciar ao estudo deste tema e da própria Matemática na sala de aula à luz da IM.

Como este trabalho é fruto de uma pesquisa de mestrado profissional, as reflexões didáticas aqui trazidas tiveram contribuições significativas do Produto Educacional, no formato de caderno de atividades, intitulado: *A Generalização do Teorema de Pitágoras e o software GeoGebra*, Costa (2021b, no prelo). Desse modo, tal material traz a Matemática Islâmica Medieval dentro de uma abordagem histórica, tecnológica e investigativa. Neste sentido usaremos parte do Produto, relacionando sempre com as discussões teóricas propostas na pesquisa, para retratar essas reflexões didáticas sobre as quais discutiremos ao longo deste trabalho.

O aporte Islâmico para Matemática é fundamental para se visualizar os caminhos tomados por esta ciência na história e o seu domínio no desenvolvimento da Matemática do Ocidente, por isso, compreendemos ser importante o resgate histórico da Matemática Islâmica Medieval, de fato:

Nos últimos anos, também, historiadores da matemática reaprenderam

⁴Sobre o termo aqui usado: Teorema de Pitágoras, Roque (2012, p. 113) discute que “não deve ter havido um teorema geométrico sobre o triângulo retângulo demonstrado pelos pitagóricos, e sim um estudo das chamadas triplas pitagóricas.”. O resultado de Thabit no estudo presente nessa pesquisa dissertativa se refere a investigação desses termos sendo trabalhado por ele no Tratado da Prova atribuída a Sócrates sobre o Quadrado e suas Diagonais, em que apresenta duas provas e uma generalização do que hoje nomeamos como Teorema de Pitágoras e assim, optamos por referenciá-lo neste trabalho.

⁵ Não há evidências, até o momento, de quem seria este amigo.

o que nossos antepassados medievais e renascentistas sabiam: a contribuição islâmica afetou o desenvolvimento de todos os ramos da matemática no Ocidente e foi de primordial importância. (BERGGREN, 1986, prefácio, tradução nossa)

Neste contexto, consideramos que a aliança entre HM e TDIC é algo relevante sobretudo quando propomos algo voltado para o âmbito do ensino de Matemática. A esse respeito, a Base Nacional Comum Curricular (documento que considera as aprendizagens essenciais para o aluno da Educação Básica) ressalta que não basta somente trazer os *softwares* de geometria dinâmica, como o GeoGebra que usamos nas atividades desse trabalho, mas é preciso pensar na HM, com a finalidade de fornecer de forma mais significativa o ensino e a aprendizagem da Matemática. Nesse sentido, o referido documento destaca que:

Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica, é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos. (BRASIL, 2018, p. 296)

Em busca da efetivação da referida aliança, nos fundamentamos no processo de Investigação Matemática (IM) de Ponte, Brocado e Oliveira (2019), nas favoráveis argumentações no que se refere ao uso de História no ensino de Matemática de Miguel e Miorim (2019), bem como, os apontamentos de Borba e Penteado (2019) acerca da Informática e Educação Matemática.

Para compreendermos o desenvolvimento da proposta didática (Produto Educacional), que tem como base a escrita historiográfica sobre Thabit, seu contexto e a generalização do teorema de Pitágoras feita por ele, assim como o auxílio das tecnologias digitais, à luz do processo de IM, apresentamos uma discussão sobre o caminho metodológico que fizemos até chegar a estas reflexões didáticas da pesquisa, desse modo segue.

1 Caminhos Metodológicos da Pesquisa

Para concepção da pesquisa aqui apresentada, lançamos mão da abordagem metodológica qualitativa, desenvolvendo uma pesquisa bibliográfica. Consideramos essa pesquisa importante, ao se tratar investigação de problemas de pesquisa, sobretudo, de cunho histórico. Kothari (2004) afirma que voltar esse olhar para pesquisas que tiveram um tratamento analítico anterior é fundamental para o delineamento do caminho a ser seguido frente ao objeto da pesquisa, inclusive porque a pesquisa bibliográfica possibilita que a partir de uma fonte, encontrem-se outras fontes que podem ajudar na investigação do problema. Nessa direção, e considerando o caráter histórico dessa pesquisa, Gil (2019) destaca o quanto a pesquisa bibliográfica e documental são fundamentais nos estudos históricos como este projeto, justamente porque a reflexão sobre acontecimento do passado necessita da análise de documentos, incluindo os que já tiveram um tratamento analítico anterior.

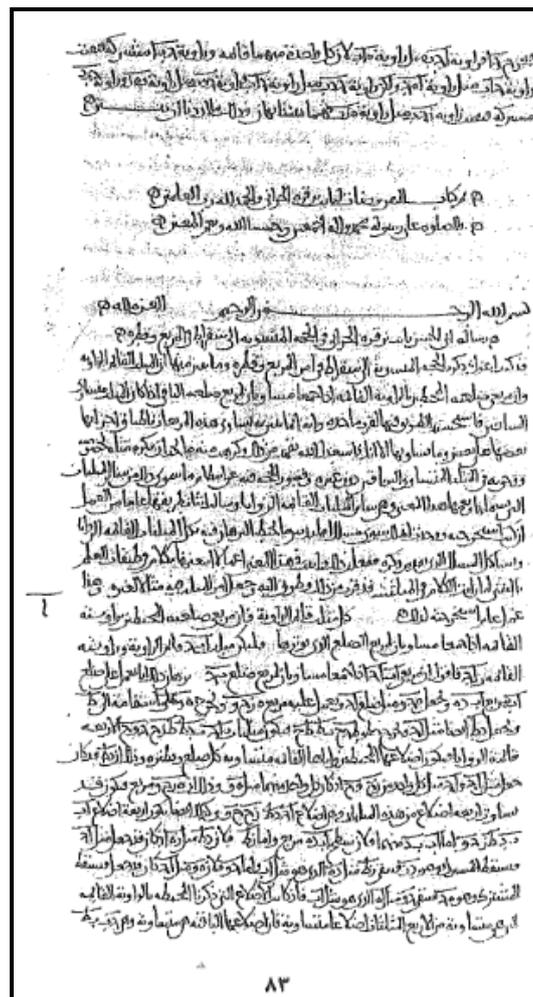
Na pesquisa bibliográfica, fizemos levantamentos em sites como o *MacTutor*, Google Acadêmico, além de Periódicos da Capes. Com o levantamento encontramos três artigos principais que retratam Thabit ibn Qurra, com destaque para os estudos da generalização do teorema de Pitágoras: Sayili(1958), Sayili (1960) e Shloming (1970). Além disso, fizemos buscas em bibliotecas e museus, com a finalidade de encontrar uma cópia da carta de Thabit direcionada a um amigo, correspondente a nosso objeto de estudo e obter maior amplitude de análise do documento em que se encontra o tratado.

Identificamos, no artigo de Sayili (1960), em uma nota de rodapé a referência ao trabalho: o *Sâbit ibn Kurra'nin Pitagor Teoremini Tamimi* (traduzimos como: O Completo Teorema de Pitágoras feito por Thabit ibn Qurra), de Thabit (1958) e Sayili (1958). Segundo Sayili (1960), este texto traz a carta de Thabit direcionada a um amigo, em árabe e com a respectiva tradução turca. Portanto, para esclarecer, no trabalho *Sâbit ibn Kurra'nin Pitagor Teoremini Tamimi*, para as citações que trazem os comentários de Sayili, citaremos Sayili (1958), no entanto, quando citarmos o texto de Thabit traduzido por Sayili, usaremos Thabit (1958). Ambos: Sayili (1958), Sayili (1960), Shloming (1970) afirmam que o *Tratado da Prova atribuída a Sócrates sobre o Quadrado e suas Diagonais*, segundo Thabit ibn Qurra está resguardado na Biblioteca Museu de AyaSofya, em Istambul na Turquia, em um Codex AyaSofya⁶, com registro 4832. Neste

⁶ Em português, Códices, eram coleção de manuscritos antigos, mais informações: <https://conceitos.com/codice/>

codex há manuscritos sobre as mais variadas áreas, como Matemática e Astronomia, escritos por diversos estudiosos, além de Thabit, como al-Kindi (801 d. C. – 873) e outros, sob a edição de Fuat Sezgin, 2010. Ademais, observamos que não tivemos acesso a todos os manuscritos presentes no codex, apenas ao de Thabit, de forma digitalizada que, por sua vez, usamos à título de comparação e confrontamento com a tradução turca e o texto árabe de Sayili (1958), devido à limitação do idioma árabe.

Figura 1 – Primeira página do Tratado digitalizado de Thabit ibn Qurra



Fonte: Sezgin⁷ (2010)

⁷ Documento digitalizado do original de Thabit e disponível no codex AyaSofya, editado por Sezgin (2010).

Para as atividades que foram propostas no produto Educacional, tomamos como objeto de análise a tradução turca de Sayili (1958), comparando com a versão digitalizada do documento. A seguir a primeira página do tratado intitulado: *Risāla fi 'l-Hujja al-Mansūba ilā Suqrāt fi al-Murabba' wa-Qutrihi (On the Proof Attributed to Socrates on the Square and its Diagonal)*⁸ – que traduzimos como *Tratado da Prova atribuída a Sócrates sobre o Quadrado e suas Diagonais*.

Como dito, este tratado está presente em uma carta, escrita por Al-Sabi Thabit ibn Qurra al-Harrani direcionada a um amigo no período medieval. Considerando que o idioma do tratado original está em árabe e os pesquisadores do estudo não tem domínio em tal idioma, usamos a tradução turca de Ayidin Sayili (1958) para nossas investigações e composição do texto histórico utilizado no Caderno de Atividades de Costa (2021b, no prelo). Nessa versão, a carta é nomeada por: *KARE İLE KÖŞEGENİ HAKKINDAKİ (TEOREMİN) SOKRATES TARAFINDAN VERİLEN İSPATI ÜZERİNE EBÜ'L HASAN SABİT İBN KURRA'NIN RİSALESİ*, que traduzimos para o português, como: *O TRATADO DE ABU'L HASAN THABIT IBN QURRA EM RELAÇÃO À PROVA ATRIBUÍDA A SÓCRATES SOBRE O QUADRADO E SUA DIAGONAL*. Contudo, algumas vezes recorreremos a versão em árabe para confirmação de alguns trechos da tradução bem como originalidade do documento. Para tanto, contamos com auxílio de um amigo fluente no idioma. Uma versão das traduções que usamos e geramos pode ser vista na figura 2.

Salientamos que tais figuras foram usadas no produto.

A partir deste caminho metodológico apresentado, é importante conhecermos traços biográficos de Thabit, assim como alguns entendimentos que emergiram da análise da carta de Thabit direcionada a um amigo, para tanto segue tal apreciação que também foi usada na elaboração do produto fruto da pesquisa.

⁸ Veja: <https://muslimheritage.com/thabit-ibn-qurra/> para visualização do título do tratado e de outros, a partir de um artigo eletrônico biográfico de Thabit.

Figura 2 – Traduções turca e portuguesa da primeira página da carta de Thabit direcionada a um amigo sobre o *Tratado da Prova atribuída a Sócrates sobre o Quadrado e suas Diagonais*

<p>KARE İLE KÖŞGENİ HAKKINDAKİ (TEOREMİN) SOKRATES TARAFINDAN VERİLEN İSPATI ÜZERİNE EBÜ'L HASAN SÂBİT İBN KURRA'NIN RİSALESİ</p> <p>(Türkçe Tercüme)</p> <p>Allah seni aziz kılsın; kare ve köşegeni ile ilgili Sokrates ispatını ve bu ispatta sarih olarak meydana çıkan hususları, yani üçgenin dik olduğunu ve ikizkenar olması halinde dik açığı meydana getiren iki kenarın kareleri toplamının diğer kenar karesine eşit olduğunu söz konusu ediyor, bundaki metodu kolayca anlaşılabilirliği bakımından övüyorsun. Gerçekten, bu metodla, buradaki dörtgenlerin eşitliği, bunların birbirlerine eşit kısımlarının bazılarının birbirleriyle intibak ettirilmesi suretiyle meydana çıkıyor. Ancak, Allah seni mesut etsin, özel bir hali temsil edip sadece ikizkenar üçgen için zaruri olarak doğru olması ve bu teoremin şümulu içine girmeşi gereken ikizkenardan gayri dik üçgenleri ihtiva etmemesi bakımından hakikaten beğenilmemesi gereken mahiyetinden dolayı bu ispatı kusurlu bulduğumu, bu ispatın seni tatmin etmediğini söylüyorsun; ve bunun genel ispatını yapmışsam bunu sana bildirmemi istiyorsun.</p> <p>Ben, Öklid ispat tarzından farklı olmak üzere ve zikri geçen Sokrates metoduna benzer bir yoldan, bütün dik üçgenlere şâmil bir ispat şekli tesbit etmiş bulunuyorum. Burada bu ispat tarzını takdim ediyor, ve ayrıca, bu görüş açısından mesele ile ilgili muhtelif teoremler sunuyorum. Bunların peşinden de, muayyen bir konudaki bilginizin dereceleri üzerinde birkaç söz ilâve etmiş bulunuyorum. Çünkü üçgen hakkında söylediklerim sözü bu konuya getirdi ve beni bu yola sevk etti. Elimizdeki üçgen meselesi de daha geniş olan bu konuya bir misal teşkil etmiş oldu.</p> <p>Sâbit ibn Kurra burada Sokrates usuluna uygun iki ispat tarzı veriyor. Bunlar burada asıl metindekine nazaran kısaltılmış olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.</p> <p>Birinci ispat: Asıl üçgen ABC'dir. FC ve BB' doğru parçaları AB'ye eşit olarak çiziliyor. AA'B'B ve DD'F'F kareleri AB ile BC doğru parçalarının karelerine, ACDE ise AC'nin karesine eşittir. Resimdeki 1, 2, 3, ve 4 numaralı üçgenler, kolayca</p>	<p>O TRATADO DE ABU'L HASAN THABIT IBN QURRA EM RELAÇÃO À PROVA ATRIBUÍDA A SÓCRATES SOBRE O QUADRADO E SUA DIAGONAL</p> <p>(Tradução Turca)</p> <p>Que Allah o torne santo; A prova de Sócrates sobre o quadrado e a diagonal e os pontos que ocorrem obviamente nesta prova, ou seja, o triângulo é perpendicular e se for um isóscele, a soma dos quadrados dos dois lados que formam o ângulo reto é igual ao quadrado do outro lado, você elogia o método aqui para fácil compreensão. De fato, com este método, a igualdade dos quadriláteros aqui surge combinando algumas de suas partes iguais entre si. No entanto, que Allah lhe agrade, você diz que acha esta prova falha por causa de sua natureza, que não deveria ser admirada, uma vez que representa um estado especial e só é essencialmente verdadeira para um triângulo isóscele e não contém triângulos retângulos além de isósceles que deveriam ser incluídos neste teorema, e esta prova não o satisfaz, e você quer que eu informe se eu fiz uma prova geral disso.</p> <p>Encontrei uma forma de prova que inclui todos os triângulos retângulos, diferente da forma euclidiana de prova e de uma forma semelhante ao método de Sócrates mencionado. Apresento aqui esse modo de prova e, também, desse ponto de vista, apresento vários teoremas sobre o assunto. Em seguida, acrescentei algumas palavras sobre o grau de nosso conhecimento sobre um determinado assunto. Porque o que eu disse sobre o triângulo trouxe a palavra até esse ponto e me levou a esse caminho. A questão do triângulo que temos também deu um exemplo para essa questão maior.</p> <p>Thabit ibn Qurra aqui dá dois estilos de prova de acordo com o método de Sócrates. Elas podem ser expressas aqui de forma abreviada em comparação com o texto original.</p> <p>Primeira prova: o triângulo original é ABC. Os segmentos de linha FC e BB' são desenhados igualmente para AB. Os quadrados AA'B'B e DD'F'F são iguais aos quadrados dos segmentos de reta AB e BC, e ACDE ao quadrado de AC. Os triângulos 1, 2, 3 e 4 na imagem podem facilmente</p>
---	---

Fonte: Sayili (1958) e Costa (2021b, no prelo)

2 A carta de Thabit ibn Qurra direcionada a um amigo

É relevante destacar o contexto em que Thabit e sua produção estavam inseridos, de modo que buscamos apresentar detalhes sobre este estudioso islâmico medieval, à medida que nos imergimos na sua produção científica a partir do documento analisado. A análise da carta de Thabit direcionada a um amigo apresentando o que consideramos como a *Generalização do Teorema de Pitágoras* foi fundamental para realizar o estudo histórico proposto e compreender as contribuições de Thabit acerca da generalização, bem como de seu material para ensino, particularmente, de Matemática.

Assim, ao analisarmos o documento, mergulhamos um pouco nos contextos em que Thabit se encontrava e identificamos que o conhecimento grego teve grande influência em suas produções. Uma possibilidade de explicação é o fato de que, segundo Doak (1963), os abássidas favoreceram essa relação da produção islâmica com o

conhecimento grego. Nesse contexto da civilização abássida, destacamos Thabit ibn Qurra (ver a caricatura na Figura 03). Thabit ibn Qurra nasceu em uma cidade da Mesopotâmia, chamada Harran, atualmente sul da Turquia e fronteira com a Síria (ver Figura 03), no ano de 836 d. C. e faleceu em 901 d. C.

Figura 3 - Thabit ibn Qurra (836-901) e a posição atual de Harran (Turquia)



Fonte: Mushtaq (2009), O'Connor e Robertson (2015)

Ao reconhecerem e considerarem as habilidades linguísticas de Thabit, os três irmãos, *Banu Musa*, se tornaram seus patronos. Segundo Sarton (1927), os *Banu Musa* são: Jafar Muhammad Banu Musa (800 d.C. - 873); Ahmad Banu Musa (805 d.C. - 873) e al-Hasan Banu Musa (810 d.C. - 873), considerados relevantes patrocinadores da ciência, mas foram também responsáveis por desenvolverem estudos nas áreas da Matemática e Astronomia, por exemplo. Eles direcionaram parte da riqueza na aquisição de manuscritos gregos, que também utilizavam em seus estudos, para isso investiram em tradutores, como Thabit que tinha a fluência no Grego, Síriaco e Árabe. Thabit foi levado pelos três irmãos para Bagdá e começou a traduzir, revisar e restaurar obras gregas para o Árabe e Síriaco, a fim de auxiliar nos estudos dos *Banu Musa*. Algumas produções de Thabit nesse sentido: *Almagesto* de Ptolomeu; *As Cônicas* de Apolônio; *Data* e *Os Elementos* de Euclides, entre outros (SHLOMING, 1970). O relacionamento de Thabit com os estudos grego fomenta o quanto os islâmicos estavam volvidos para produção dos gregos, seja com o intuito de melhorar o que se tinha até o

momento (inclusive com obras inéditas, como é a *Generalização do Teorema de Pitágoras*), seja com a finalidade de recuperar e perdurar os estudos produzidos anteriormente pelos gregos (nas traduções para o árabe da produção científica dos gregos).

Segundo Sayili (1960), Thabit investiga a prova de Sócrates e traz duas provas para o caso dos triângulos retângulos, situação mais geral que a socrática. Ao passo que desenvolvemos a pesquisa histórica, identificamos que a prova socrática, anteriormente citada, é a descrita por Platão (428 a. C. – 348) em *Menon* para um triângulo retângulo isósceles, resultado do quadrado e suas diagonais. Entretanto, da análise do documento de Thabit, observamos que ele não especifica essa obra de Platão em seu estudo.

A *Generalização do Teorema de Pitágoras* foi requerida por um amigo de Thabit, desejando-lhe uma prova mais geral. Este amigo não estava satisfeito com a Prova Socrática, como dito, já que era aplicada a triângulos retângulos isósceles, mas também não estava satisfeito com as duas provas apresentadas por Thabit e mencionadas anteriormente, visto que essas provas se aplicam a triângulos retângulos, sejam isósceles ou não. Tais aspectos podem ser observados no trecho da carta que diz:

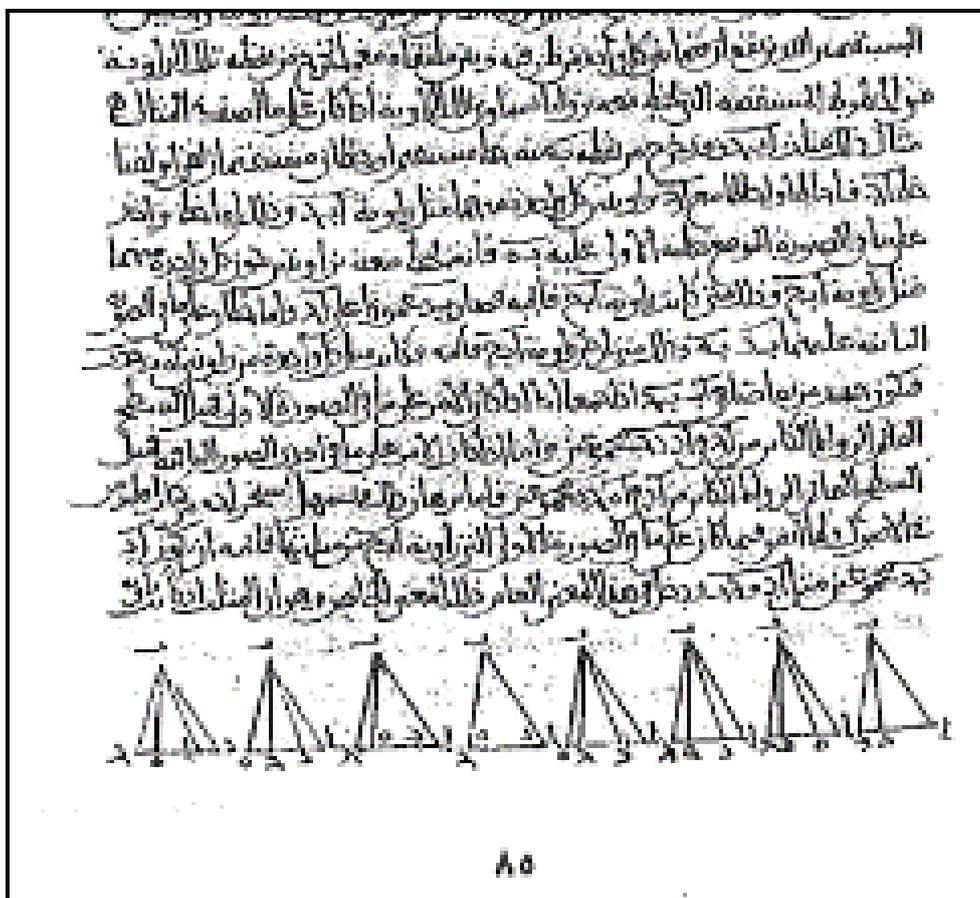
Que Allah lhe agrade, você diz que acha esta prova falha [a Prova Socrática] por causa de sua natureza, que não deveria ser admirada, uma vez que representa um estado especial e só é essencialmente verdadeira para um triângulo isósceles e não contém triângulos retângulos além de isósceles que deveriam ser incluídos neste teorema, e esta prova não o satisfaz, e você quer que eu informe se eu fiz uma prova geral disso. (THABIT, 1958, p. 543, tradução nossa)

Atribuímos a Thabit a elaboração dessas provas, no entanto, consideramos a relevância do conhecimento em trânsito na época que, de certa forma, pode ter influenciado Thabit, tanto o propor essas provas, quanto os métodos utilizados para demonstração dessas provas. Como dito, Thabit estava imerso em produções gregas, como de Euclides, ele inclusive faz referência em alguns momentos do tratado.

Segundo Shloming (1970), Thabit afirma que as provas que ele apresentou não são suficientes, inclusive quando se pensa em quaisquer triângulos, já que as provas se restringem aos triângulos retângulos. Nessa direção, a fim de responder seu amigo com uma prova geral, Thabit apresenta a generalização do teorema de Pitágoras, que de acordo com Sayili (1960), pode-se considerar uma das colaborações mais significativas

de Thabit. Sayili (1958) aponta que no manuscrito digitalizado, em Sezgin (2010), há oito imagens (Figura 04) que Thabit usou para investigar a possibilidade de casos especiais para generalização do teorema de Pitágoras.

Figura 4 – Trecho do tratado em que Thabit discorre sobre a generalização do teorema de Pitágoras



Fonte: Sezgin (2010)

Nota-se que quando Thabit faz menção às imagens da figura (primeira imagem e imagens restantes), é preciso observar os oito triângulos presentes na Figura 04, tendo em conta a disposição da direita para a esquerda⁹. Na tradução turca do tratado, a *Generalização do Teorema de Pitágoras* aparece assim descrita:

Este é o triângulo ABC. Vamos desenhar uma ou duas linhas que do vértice B interceptam AC deste triângulo e fazer com isso um ângulo

⁹ Sentido da escrita árabe.

igual ao ângulo ABC. Esta linha é uma linha qualquer BD, como no primeiro desenho da imagem [...], situação em que esta linha se cruza com a base para formar dois ângulos iguais a ABC e isso corresponde ao ângulo ABC ser um ângulo reto; A linha BD é perpendicular a AC aqui. Ou, como visto no segundo desenho [...], ocorrem duas linhas como BA' e BC'. Nesta segunda situação, o ângulo ABC não é perpendicular e é igual aos ângulos AA'B e CC'B. Assim, a soma dos quadrados dos lados AB e BC é a área retangular de AC multiplicada pela soma de AD e DC, no caso em que a primeira imagem representa, e soma de AA' e CC', no caso das imagens restantes. (THABIT, 1958, p.546, tradução nossa)

Para um melhor entendimento dessa generalização, dividimos em duas situações, trazidas por Thabit (1958), porém que categorizamos da seguinte maneira: *i) Situação 1- Primeira imagem da figura; e ii) Situação 2 – Imagens restantes da figura.*

i. Situação 1 – Primeira imagem da figura:

Quando traçamos o segmento \overline{BD} , e este é perpendicular ao segmento \overline{AC} . Thabit (1958) determina que quando o ângulo formado pelo segmento de reta BD com o segmento AC for reto (90 graus), basta somarmos os quadrados dos lados AB e BC que será igual ao lado AC multiplicado pela soma dos lados AD e DC.

ii. Situação 2 – Imagens restantes da figura:

Em um triângulo ABC, quando se traçar duas linhas BA' e BC', de modo que os ângulos formados entre os segmentos BA' e BC' com o segmento AC são congruentes ao ângulo \widehat{B} , do triângulo ABC, com ângulos diferentes de 90 graus. Nesta *Situação 2*, Thabit generaliza: a soma dos quadrados dos lados AB e BC que será igual ao lado AC multiplicado pela soma dos lados AA' e CC'.

A partir da apresentação, sumariamente, de traços biográficos de Thabit, assim como do documento analisado: generalização do teorema de Pitágoras, apresentamos a seguir as reflexões didáticas a partir de recortes do Produto Educacional em confronto com os fundamentos propostos da aliança entre HM e TD, atendendo ao processo de IM.

3 Reflexões didáticas a partir da análise do documento

Para esta seção do presente artigo faremos algumas reflexões que partem do recorte de alguns questionamentos presentes nas atividades do Produto Educacional que está em construção. Vale salientar que pela dimensão do Caderno de Atividades (o produto

educacional), tomaremos como base para nossas reflexões parte de algumas atividades, não as atividades como um todo. As reflexões ocorrem a partir dos fundamentos que são base da pesquisa de mestrado e que por sua vez nortearam a produção do Caderno de Atividades.

Para as reflexões quanto à aliança entre HM, TDIC, sob o olhar da IM, que fizemos sobre o recorte das atividades, lançamos mão das declarações favoráveis ao uso da HM no ensino de Matemática, discutidas por Miguel e Miorim (2019), nos aspectos que permeiam o uso das Tecnologias Digitais na sala de aula, mais especificamente, nas aulas de Matemática, presentes em Borba e Penteado (2019). Mas também considerando o processo de Investigação Matemática em sala de aula trazido por Ponte, Brocardo e Oliveira (2019). Ainda nas reflexões didáticas feitas, dentro da aliança proposta, partiremos das considerações de Sousa (2020), quando discute efetivamente sobre a aliança, inclusive com exemplos de atividades, que, em muito, foi importante para as discussões também feitas aqui, que resultam em: atividades-históricas-com-tecnologias¹⁰.

Tomando como referência o Caderno de Atividades presente em Costa (2021b), assim como as reflexões didáticas aqui propostas, segue o Quadro 02, composto assim: *Atividade* – neste campo, colocaremos as atividades 1, 2 e 3 do Produto Educacional; *Seções presentes nas atividades* – neste espaço destacamos as seções de cada atividade; e *Alguns questionamentos presentes nas atividades* – apresentamos alguns questionamentos presentes nas seções de cada atividade.

A partir da escrita histórica, mais especificamente a *Situação 2 – Imagens restantes da figura*, a seguir apresentamos um quadro para uma reflexão didática. O Quadro 02 a seguir é composto dos seguintes tópicos: *Passo a passo proposto por Thabit (1958)* – aqui apresentamos o enunciado retórico de Thabit sobre a generalização; *Construção esperada no GeoGebra* – neste campo, apresentamos uma possível construção do enunciado retórico da generalização, a partir do protocolo de construção no GeoGebra que os alunos podem fazer, e *Alguns questionamentos presentes no Caderno de Atividades* – alguns questionamentos, não somente sobre o que Thabit afirma em relação à generalização, mas também sobre o processo investigativo desse enunciado

¹⁰ Atividades-históricas-com-tecnologias são atividades de investigação de problemas históricos com apoio das tecnologias digitais que possuem estruturas e elementos próprios de composição, como proposto por Sousa (2020).

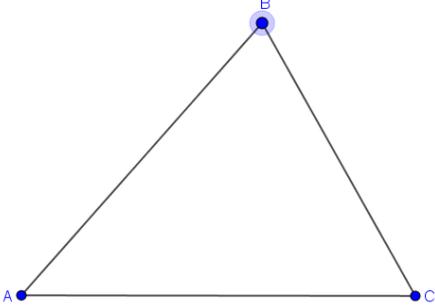
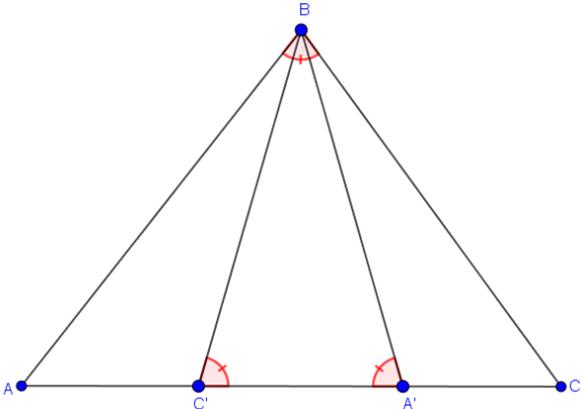
com o auxílio do GeoGebra.

Quadro 1: Apresentação das atividades e de sua estrutura, além de alguns questionamentos usados para a investigação nas referidas atividades

ATIVIDADE	ALGUMAS SEÇÕES PRESENTES NAS ATIVIDADES	ALGUNS QUESTIONAMENTOS PRESENTES NAS ATIVIDADES
ATIVIDADE 1	<ul style="list-style-type: none"> • Introduzindo a Tarefa • Apresentando o Documento • Construindo Conjecturas • Voltando ao Documento • Vamos Refletir • Investigando um pouco mais: de volta ao documento • Avaliando, socializando e encaminhamentos futuros 	<ul style="list-style-type: none"> • Note no documento que há referência a Allah por meio de uma saudação. Para você qual é o motivo dessa referência e dedicatória a Allah feita por Thabit? Há alguma relação disso com a expansão islâmica da época? • Árabe, muçulmano e islâmico são sinônimos? Ou há diferença? Dentro dessas definições, em qual está situado Thabit?
ATIVIDADE 2	<ul style="list-style-type: none"> • Conhecendo a Matemática do Documento • Vamos construir conjecturas? • Explorando a Matemática presente no documento • Avaliando, socializando e encaminhamentos futuros 	<ul style="list-style-type: none"> • Sabemos que Thabit enunciou retoricamente a generalização do teorema de Pitágoras, como você pode garantir a validade dessa generalização? • Enuncie de forma retórica a generalização do teorema de Pitágoras desenvolvida por Thabit, com suas palavras e com o que compreendeu sobre ela.
ATIVIDADE 3	<ul style="list-style-type: none"> • Conhecendo as reflexões de Thabit por meio do documento • Construindo conjecturas • Voltando às reflexões de Thabit presentes no documento • Refletindo, avaliando e socializando 	<ul style="list-style-type: none"> • Para você, quais motivos levaram Thabit a generalizar? Somente por que seu amigo solicitou? Justifique • Considerando que Thabit relaciona o conhecimento e a alma, assim como o alimento e o corpo, quais conclusões se pode tirar dessa reflexão e sobre generalizar?

Fonte: Thabit (1958); Costa (2021b, no prelo)

Quadro 2 – Alguns questionamentos sobre a construção no GeoGebra, a partir do enunciado retórico da generalização do teorema de Pitágoras, segundo Thabit

PASSO A PASSO PROPOSTO POR THABIT (1958)	CONSTRUÇÃO ESPERADA NO GEOGEBRA	ALGUNS QUESTIONAMENTOS PRESENTES NO CADERNO DE ATIVIDADES DE COSTA (2021b, NO PRELO)
<p>“Este é o triângulo ABC.” (p. 546)</p>		<ul style="list-style-type: none"> • Há outro comando, que não foi usado aqui, por exemplo no GeoGebra, que garanta esse passo enunciado por Thabit? • Movendo o vértice B, quais possibilidades de classificação deste triângulo ABC?
<p>“Vamos desenhar uma ou duas linhas que do vértice B interceptam AC deste triângulo e fazer com isso um ângulo igual ao ângulo ABC. [...], ocorrem duas linhas como BA' e BC'. Nesta segunda situação, o ângulo ABC não é perpendicular e é igual aos ângulos AA'B e CC'B. Assim, a soma dos quadrados dos lados AB e BC é a área retangular de AC multiplicada pela [...] soma de AA' e CC'.”(p. 546)</p>		<ul style="list-style-type: none"> • Há outro comando, que não foi usado aqui, por exemplo no GeoGebra, que garanta esse passo agora enunciado por Thabit? Justifique sua resposta, refletindo sobre a garantia dos comandos em relação ao passo a passo enunciado por Thabit. • Você consegue, explorando esta construção feita, visualizar as imagens a que Thabit se refere no enunciado da Generalização? Justifique sua resposta. • Considerando a decorrência matemática para Situação 2: $(\overline{BA})^2 + (\overline{BC})^2 = (\overline{AA'} + \overline{CC'}) \times \overline{AC}$. A partir dos passos apresentados foi possível verificar a validade da Generalização do Teorema de Pitágoras feita por Thabit ibn Qurra para quaisquer triângulos? Mova o vértice B, de modo a encontrar $\widehat{B} \neq 90^\circ$, investigue essa validação e justifique a sua resposta.

Fonte: Thabit (1958); Costa (2021b, no prelo)

É importante destacar que segundo Miguel e Miorim (2019), a história apresentada diretamente não é eficaz, pois para cada lugar se terá um olhar diferente voltado para a história, já que esta história está ligada a uma cultura e sociedade específica, destacando que o aluno pode aprender, à medida que traz as relações históricas, sociais, políticas, culturais de cada povo. Essas relações históricas podem ser encontradas nessa atividade (quadro 02), assim como no título de algumas seções (quadro 01), a partir do momento que convida o aluno a uma imersão no documento, inserindo assim o estudante inicialmente no contexto da Matemática Islâmica da Idade Média, mas também em como a Matemática era tratada por esses estudiosos. Dentro dessa perspectiva, Miguel e Miorim (2019) ainda discutem sobre a importância de apresentar a historicidade dos temas matemáticos, vinculados aos contextos em que eles emergiram, inclusive porque considera-se o movimento que esse conhecimento fez e todo conhecimento que estava em trânsito na época, desmistificando a Matemática, trazendo ao estudante uma não-alienação de seu ensino, além de uma maior proximidade com os métodos históricos utilizados, por exemplo, neste caso na *Generalização do Teorema de Pitágoras*, segundo Thabit, além de quando se questiona ao estudante os motivos que levaram Thabit generalizar (questionamento presente no quadro 01).

Quando Borba e Penteado (2019) trazem o coletivo seres-humanos-com-mídia ou seres-humanos-com-tecnologias, considera-se que o pensamento matemático não está desvinculado de alguma mídia ou tecnologia, que há uma simbiose, interdependência entre o desenvolvimento do pensamento matemático com uso das tecnologias. Nesta proposta de atividades o *software* GeoGebra aparece muito mais que outra forma de se visualizar o enunciado retórico de Thabit ibn Qurra quanto a generalização do teorema de Pitágoras. Partindo de Borba e Penteado (2019), compreendemos que o GeoGebra possibilita ao aluno uma maior autonomia no processo de aprendizagem matemática, ao explorar, a partir das ferramentas nele contidas, os passos de Thabit quanto à generalização, o que resulta no coletivo seres-humanos-com-tecnologia. Borba e Penteado (2019) ainda reforçam a importância do processo e não do produto, que neste recorte do nosso Produto Educacional, percebemos o processo ao aluno acompanhar os passos propostos no protocolo de construção e os passos enunciados por Thabit. Além de reforçar, nesse contexto do processo, a possibilidade de otimização do tempo, de modo que o *software* oportuniza essa otimização, bem como dinamicidade, aspectos importantes em uma investigação de problemas históricos.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2019) defendem que o ensino de Matemática não é linear, ele surge de maneira dinâmica, permitindo produção do conhecimento matemático. O processo de IM está imerso nessas atividades, a partir do momento que oportuniza o aluno conjecturar hipóteses - no questionamento, visualizamos isso, ao se pedir ao estudante que identifique se a construção feita está de acordo com as imagens feitas por Thabit (Figura 04); testar e reformular essas hipóteses - observamos nos questionamentos, quando se pede para mover o vértice B e identificar se foi validada a generalização do Teorema de Pitágoras para quaisquer triângulos, como enunciado por Thabit; e a justificativa das conjecturas – encontra-se nesse recorte do caderno de atividades, ao solicitar ao estudante que apresente justificativas, por exemplo, se há outros comandos que validem o passo enunciado sobre a generalização. Esse processo de investigação pode ser encontrado também na alusão aos títulos das seções (quadro 01), assim como em alguns questionamentos presentes no quadro 01, ao passo que promove uma dinâmica no ensino de Matemática, à medida que adentra no documento, volta a imergir, reflete-se a partir da imersão feita, volta a testar as conjecturas refletidas e assim por diante.

Promover a aliança entre essas Tendências da Educação Matemática é trazer para o Caderno de Atividades as potencialidades que cada tendência apresenta aliadas. Muito embora, essas tendências apresentadas de forma isolada tenham suas limitações no ensino de Matemática. Silva (2019, p. 107) destaca que “entrelaçamos a HM, as TDIC e a IM de tal modo que se tornem tendências potenciais, comandadas pela História da Matemática num processo uno de aliança, a qual chamaremos como investigação-histórica-com-tecnologia.”.

Vale destacar que essa reflexão didática sobre a aliança entre História da Matemática, Tecnologias Digitais, via processo de Investigação Matemática, a partir da análise de uma carta de Thabit direcionada a um amigo, pois há possibilidade de discutir como essa aliança pode ocorrer, mesmo que somente com a apresentação de um recorte das atividades, mas que com o caderno de atividades de forma completa certamente aprofundarão as discussões aqui apresentadas. Nesse sentido, tomamos como argumentos reforçadores dessa aliança, encontrados a partir das reflexões didáticas feitas: a desmistificação da Matemática e o estudo dos métodos; autonomia intelectual; validação do processo e não do produto; solucionar problemas e os momentos trazidos numa investigação matemática.

Isto posto, seguem algumas considerações finais sobre este trabalho, tomando como base as reflexões tidas até o momento.

Considerações Finais

A aliança entre HM, TDIC, via IM que abordamos é trazida no Produto Educacional, no formato de Caderno de atividades, presente em Costa (2021b, no prelo) de modo que nos possibilitou reflexões didáticas, mais ainda, nos oportunizou visualizar como se deu essa aliança, partindo-se da análise do referido documento.

Imergir na análise desse documento, com o auxílio do GeoGebra é uma possibilidade pedagógica de se ensinar a generalização matemática, ainda mais, é considerar as contribuições islâmicas para a Matemática que temos e para a Matemática que é ensinada na sala de aula e na formação de professores de Matemática, reforçando as reflexões didáticas que fizemos neste trabalho em conjunto com a potencialidades trazidas pelas três tendências da Educação Matemática trazidas de forma uma, em aliança.

Referências

- BERGGREN, J. L. **Episodes in the Mathematics of Medieval Islam**. New York: Springer, 1986.
- BORBA, M. de C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 6 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.
- COSTA, A. E. J. da. **Thabit Ibn Qurra (836-901) e a Generalização Do Teorema de Pitágoras: Aliando História, Tecnologia e Investigação no Ensino de Matemática**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2021a. No prelo.
- _____. **A Generalização do Teorema de Pitágoras e o software GeoGebra**. Produto Educacional (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2021b. No prelo.
- DOAK, R. S. **Empire of the Islamic world**. Rev. ed. p. cm. (Great empires of the past). 1963.
- GIL, A. C. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. 7 ed. São Paulo: Editora Atlas S.A., 2019.
- GIORDANI, M. C. **História do mundo árabe medieval**. Petrópolis: Vozes, 1976.
- KOTHARI, C. R. **Research methodology: Methods and techniques**. New Age International, 2004.
- MIGUEL, A.; MIORIM, M. Â. **História na Educação Matemática: propostas e desafios**. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

MUSHTAQ, M. A. **THABIT IBN QURRA**. (2009). Disponível em: <<http://www.pakbaan.blogspot.com/2009/05/thabit-ibn-qurra.html> >. Acesso em: 18 jul. 2021.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Thabit**. (2015). In: MacTutor History of Mathematics [Archive](#). Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Thabit.html> >. Acesso em: 12 dez. 2018.

PONTE, J. P. da; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. 4. Ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019.

RASHED, R. **Thābit ibn Qurra : science and philosophy in ninth-century Baghdad**. Berlin: Gruyter, 2009.

ROQUE, T. **História da matemática**. Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Zahar: Rio de Janeiro, 2012.

SAYILI, A. **Thabit ibn Qurra's Generalization of the Pythagorean Theorem**. The University of Chicago Press: The History of Science Society. 1960. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/227603?origin=JSTOR-pdf>. Acesso em: 22 jul. 2018.

_____. Sābit ibn Kurra'nin Pitagor Teoremini Tamimi. **Bellesten**, v. 22, p. 527-549, 1958.

SEGZIN, F. **A collection of Mathematical, Philosophical, Meteorological, and Astronomical treatises**. Thabit ibn Qurra, Abu Yusuf Ya'qub al-Kindi, Abu L-Saqr al-Qabisi, Abu Sahl al-Kuhi, and others, Codex AyaSofya: 4832 (Institute for The History Arabic-Islamic Science at the Johann Wolfgang Goethe University Frankfurt am Main). 2010.

SHLOMING, R. **Thabit ibn Qurra and the Pythagorean Theorem**. The Mathematic Teacher. 1970. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/27958444?Search=yes&resultItemClick=true&searchText=sAYILI&searchUri=%2Faction%2FdoBasicSearch%3FQuery%3DsAYILI%26amp%3Bfilter%3D&ab_segments=0%2Fbasic_SYC-4800%2Ftest&refreqid=search%3Aa1aa054c9663acdf755b83bb232de1bd&seq=7#metadata_info_tab_contents. Acesso em: 02 nov. 2019.

SILVA, A. L. F. da. **História da matemática, tecnologias digitais e investigação matemática no ensino de unidades temáticas de matemática da BNCC para o 8º ano**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2019.

SOUSA, G. C. de. **Aliança entre História da Matemática e Tecnologias via Investigação Matemática**. Livraria da Física, 2020.

THABIT, ibn Qurra. Trad. Ayidin Sayili. In: Sābit ibn Kurra'nin Pitagor Teoremini Tamimi. **Bellesten**, v. 22, p. 527-549, 1958.