

Contribuições de atividades exploratórias utilizando *softwares* dinâmicos para o ensino de Geometria Espacial: uma pesquisa com professores de Matemática do Ensino Médio

CLÁUDIO BERNARDO LUCIO PACHECO¹

FREDERICO DA SILVA REIS²

EDER MARINHO MARTINS³

Resumo

Este artigo apresenta uma pesquisa que objetivou investigar a utilização de Tecnologias Digitais em Geometria Espacial na perspectiva de professores de Matemática do Ensino Médio. A metodologia de pesquisa qualitativa contemplou o desenvolvimento de atividades exploratórias relacionadas a conceitos de Geometria Espacial no Ensino Médio, com a utilização dos softwares dinâmicos Poly e GeoGebra 3D por professores de Matemática do Ensino Médio. Identificamos um conjunto de contribuições para o ensino de Geometria Espacial, tais como a visualização e o dinamismo proporcionados pelos softwares, evidenciando a compreensão, a reconstrução e consolidação das características e propriedades geométricas. Nas conclusões da pesquisa, perspectivamos uma proposta de ressignificação do ensino de Geometria Espacial para além da aplicação de fórmulas.

Palavras-chave: *Tecnologias Digitais; Geometria Espacial; Ensino Médio.*

Abstract

This article presents research that investigates the use of Digital Technologies in Spatial Geometry from the perspective of High School Mathematics teachers. The qualitative research methodology included the development of exploratory activities related to concepts of Spatial Geometry in High School, with the use of dynamic software Poly and GeoGebra 3D by High School Mathematics teachers. In this article, the authors identified contributions to the teaching of Spatial Geometry, such as the visualization and dynamism provided by the software, showing the understanding, reconstruction and consolidation of geometric characteristics and properties. The researchers concluded that they envisage a proposal for re-signification of the teaching of Spatial Geometry beyond the application of formulas.

Keywords: *Digital Technologies; Spatial Geometry; High School.*

Introdução

No cenário educacional atual, quase que paralelamente aos anseios dos professores

¹ Universidade Federal de Ouro Preto. PPG em Educação Matemática – e-mail: kal.prof@hotmail.com

² Universidade Federal de Ouro Preto. PPG em Educação Matemática – e-mail: frederico.reis@ufop.edu.br

³ Universidade Federal de Ouro Preto. PPG em Educação Matemática – e-mail: eder@ufop.edu.br

em buscar as tecnologias, a sociedade cobra da escola uma nova postura em relação ao ensino.

Não há como negar que as tecnologias invadiram as salas de aula sem pedir permissão para entrar e estão disponíveis para a Educação. Cabe aos professores, então, viabilizar e definir sua utilização, nesse caso, com propósitos claramente planejados para os processos de ensino e de aprendizagem.

As possibilidades para o uso dos recursos tecnológicos na Educação Matemática são inúmeras. A própria Matemática traz diversas formas de abordagens diante dos mais variados conteúdos específicos, como por exemplo, de Geometria. Nesse contexto, Pereira (2017) aborda algumas dificuldades existentes no ensino de Geometria na Educação Básica, especialmente, de Geometria Espacial no Ensino Médio e, ao mesmo tempo, aponta alguns caminhos e possibilidades para novas alternativas de ensino, principalmente, por meio de metodologias que utilizam as Tecnologias Digitais.

Dentro dessa perspectiva, os *softwares* Poly e GeoGebra 3D se inserem na discussão do ensino de Geometria Espacial, por possibilitarem construções geométricas e manipulação de figuras que auxiliam a desenvolver a capacidade dedutiva-argumentativa dos alunos, gerando autonomia na construção dos conteúdos geométrico-espaciais que são trabalhados no Ensino Médio.

A partir dessa problematização, no presente artigo⁴, apresentamos uma pesquisa que visou investigar as contribuições de atividades exploratórias utilizando os *softwares* Poly e GeoGebra 3D para o ensino de Geometria Espacial, na perspectiva de professores de Matemática do Ensino Médio, como descrevemos a seguir.

1 Sobre o ensino de Geometria Espacial

Algumas pesquisas em Educação Matemática traçam um panorama histórico do ensino de Geometria no Brasil (BORSOI, 2016; IDEM, 2017). Um dos graves problemas que persiste até hoje e já era apontado por Lorenzato (1995) é a falta de conhecimento geométrico do professor que, muitas das vezes, o coloca diante de um dilema:

⁴ Este artigo é recorte de uma dissertação de mestrado acadêmico defendida no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, escrita pelo primeiro autor, orientada pelo segundo autor e coorientada pelo terceiro autor.

Considerando que o professor que não conhece Geometria também não conhece o poder, a beleza e a importância que ela possui para a formação do futuro cidadão, então, tudo indica que, para esses professores, o dilema é tentar ensinar Geometria sem conhecê-la ou, então, não ensiná-la (LORENZATO, 1995, p. 3-4).

Particularmente, uma das questões preocupantes abordadas por pesquisadores em relação ao ensino de Geometria Espacial é a sua “algebrização”, especialmente, pelo uso excessivo de fórmulas e cálculos (MENESES, 2007). De acordo com Borsoi (2016), tal “algebrização” é característica de todo o ensino de Geometria que, até a década de 1960, esteve voltado ao “formalismo clássico, baseado no modelo euclidiano.” Com o Movimento da Matemática Moderna, por meio da teoria dos conjuntos, dá-se ênfase ao ensino de Álgebra e assim, “abre-se mão do ensino da Geometria no Brasil”, o que trouxe graves consequências para tal ensino de acordo com a pesquisadora, pois:

Pode-se dizer que a Geometria, quando trabalhada, passa a ser ensinada de forma algebrizada, adquirindo caráter abstrato, baseado no rigor e simbolismos matemáticos, próprios da teoria de conjuntos. O professor, assim como nas décadas anteriores, continua sendo o centro do processo de ensino, apresentando conteúdos e formalismos que deveriam ser reproduzidos pelos alunos (BORSOI, 2016, p. 17).

De fato, o ensino e a aprendizagem de Geometria Espacial vão muito além de cálculos e aplicações de fórmulas de áreas e volumes dos sólidos geométricos. Lorenzato (1995, p. 5) justifica:

[...] a necessidade do Ensino de Geometria, pelo fato de que um indivíduo sem esse conteúdo nunca poderia desenvolver o pensamento geométrico, ou ainda, o raciocínio visual, além de não conseguir resolver situações da vida que forem geometrizados. Não poderá ainda utilizar-se da Geometria como facilitadora para a compreensão e resolução de questões de outras áreas do conhecimento humano.

Outra questão particularmente apresentada pelos professores que ensinam Geometria Espacial no Ensino Médio é a chamada “falta de base” dos alunos em relação a

conteúdos de Geometria Plana estudados no Ensino Fundamental. Soma-se a isso, segundo Silva (2010), as dificuldades dos alunos identificarem e distinguirem figuras planas e não-planas e, principalmente, a dificuldade de visualização tridimensional. Carvalho (1999) já apontava essa dificuldade e a necessidade de uma “tecnologia” para a representação e visualização de figuras tridimensionais:

Quando passamos para o mundo tridimensional da Geometria Espacial, passamos a enfrentar limitações de diversas ordens. Em primeiro lugar, pelo menos com a tecnologia atual, não dispomos de uma forma prática para representar com fidelidade objetos tridimensionais. Em geral, recorremos a projeções bidimensionais de tais objetos (CARVALHO, 1999, p. 1).

Ampliando a lista de fatores que contribuem para as dificuldades relacionadas aos processos de ensino e de aprendizagem da Geometria Espacial, ressaltamos ainda, o abandono das construções com régua e compasso constituintes da disciplina de Desenho Geométrico, praticamente extinta dos currículos da Educação Básica. Por meio das construções com régua e compasso, o aluno podia observar propriedades das figuras geométricas, fazer conjecturas e desenvolver habilidades geométricas fundamentais para a construção de conhecimentos geométricos planos.

Outrossim, em todas os pesquisadores citados, podemos observar uma preocupação com os processos de ensino e aprendizagem da Geometria Espacial na busca por um ensino mais significativo e contextualizado para o aluno: “Evidencia-se a busca de um ensino significativo relacionado ao contexto do aluno e percebe-se maior preocupação com os processos de ensino e aprendizagem” (BORSOI, 2016, p. 17).

Dentro dessa perspectiva, adentrando na problemática específica do ensino de Geometria Espacial, a pesquisadora também destaca várias pesquisas nas últimas décadas em Educação Matemática, ressaltando a importância da visualização dos objetos reais e afirmando que: “a habilidade da visualização é tão ou mais importante do que a de calcular numericamente e a de simbolizar algebricamente, e os educadores vêm tomando consciência desta importância para a formação global do aluno” (BORSOI, 2016, p. 18).

Além da questão da visualização, Borsoi (2016) apresenta outras pesquisas que apontam dificuldades relacionadas ao ensino de Geometria Espacial, dentre elas: a não

promoção da compreensão de propriedades geométricas, a falta de uma abordagem investigativa do objeto geométrico e, conseqüentemente, a dificuldade da construção do pensamento geométrico.

2 Sobre as Tecnologias Digitais na Educação Matemática

Mesmo que a passos lentos, o ensino e a aprendizagem de Matemática vão se apropriando desse universo tecnológico que, aos poucos, vai adentrando os ambientes escolares, nas esferas educacionais. Assim, percebe-se, nas últimas décadas, um aumento considerável de pesquisas sobre tecnologias em Educação Matemática (REIS; COMETTI; SANTOS, 2019).

Com olhar atento a essas pesquisas, isto é, às tendências da Educação Matemática, Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020) discutem as diversas potencialidades de recursos que podem ser utilizados no ensino e aprendizagem de Matemática. Essas ideias podem ser compreendidas em 4 diferentes fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática no Brasil.

A primeira fase é caracterizada basicamente pelo uso do *software* LOGO, tendo início por volta de 1985. Segundo os pesquisadores, “a primeira fase é também o momento de surgimento da perspectiva de que as escolas poderiam ou deveriam ter laboratórios de informática [...] com abordagens inovadoras para a educação, formando cidadãos reflexivos que poderiam explorar as tecnologias em outras situações e na construção de conhecimentos pessoais” (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020, p. 20).

A segunda fase é marcada pela acessibilidade e popularização dos computadores pessoais (*desktop*), e teve início na primeira metade dos anos de 1990. Essa fase também é marcada pela produção de diversos *softwares* educacionais e cursos de formação continuada para que os professores pudessem implantar “tecnologias informáticas” em sala de aula. Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020, p. 22) destacam o uso de *softwares* voltados às múltiplas representações (como o Winplot, o Fun e o Graphmatica) e de Geometria Dinâmica (como o Cabri Géomètre e o Geometricks). Segundo os pesquisadores, esses *softwares* são caracterizados por terem suas interfaces amigáveis (não exigem familiaridade com linguagens de programação) e “pela natureza dinâmica, visual e experimental” (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020, p. 22).

A terceira fase teve início no ano de 1999, aproximadamente. Sua principal característica foi o uso da internet como fonte de informações e comunicação entre os professores e alunos em cursos à distância e formação continuada de professores. Surgem expressões como “Tecnologias da Informação” e “Tecnologias da Informação e Comunicação” (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020, p. 32). Nessa fase, diversas questões foram e ainda são discutidas, como a organização dos cursos *online* e como a Matemática é transformada em ambientes virtuais de aprendizagem. Essa fase, como afirmam os pesquisadores, está em “franco desenvolvimento e vem transformando *softwares* da segunda fase e, ao mesmo tempo, vem sendo influenciada por novas possibilidades da quarta fase” (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020, p. 35).

A quarta e atual fase teve seu início em meados de 2004, com a chegada da internet rápida, transformando a comunicação *online* com a melhora da qualidade e tipo de recursos com acesso à internet. Essa fase popularizou o uso do termo “Tecnologias Digitais” e tem como principais características, segundo Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020): o GeoGebra, com a integração da Geometria Dinâmica; a multimodalidade; novos designs e interatividade; ambientes virtuais de aprendizagens; aplicativos *online*; tecnologias móveis ou portáteis, a Performance Matemática Digital.

Essas características, segundo Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020), tornam a quarta fase “um cenário exploratório, fértil ao desenvolvimento de investigações e à realização de pesquisas”, pois há muitas inquietações, questionamentos e perguntas a serem formuladas. Eles também destacam que o surgimento de cada fase não exclui ou substitui a anterior, pois elas são integradas e vão se “sobrepondo”. Observamos isso na prática, ao longo dos anos, à medida que tomamos conhecimento de certas tecnologias e a viabilização de seu uso didático (MARTINS; REIS; FERREIRA, 2023).

3 Sobre as Tecnologias Digitais no ensino de Geometria Espacial

Uma das alternativas para o ensino e a aprendizagem de Geometria Espacial, como apontam muitas pesquisas, é a utilização de recursos tecnológicos digitais apoiada nas potencialidades das Tecnologias Digitais, por meio da Geometria Dinâmica, cujo “dinamismo pode ser atribuído às possibilidades em podermos utilizar, manipular,

combinar, visualizar e construir virtualmente objetos geométricos, permitindo traçar novos caminhos de investigação” (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020, p. 22).

Dessas possibilidades associadas ao dinamismo, destacamos a manipulação e a visualização, perpassando pela construção dos objetos geométricos e, principalmente, com a “prova do arrastar”, como descrevem Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020, p. 23, grifo dos autores):

Distinções entre *desenho* e *construção* não faziam sentido quando construíamos objetos geométricos com lápis, papel e outras tecnologias, como régua e compasso, mas essa distinção começou a ser significativa com o uso de *softwares* de Geometria Dinâmica. Uma forma de verificar a distinção entre desenho e construção, por exemplo, é por meio da “prova do arrastar”.

De acordo com os pesquisadores, se uma figura não for construída com procedimentos de “régua e compasso”, isto é, que preservem suas propriedades fundamentais (invariantes), ela não resistirá à “prova do arrastar” ao movimentá-la, sendo, então, apenas um desenho e não uma construção geométrica.

Podemos notar, assim, o caráter “exploratório” nas atividades de construção com a utilização de *softwares* de Geometria Dinâmica, pois os cenários constituídos possibilitam a investigação matemática. Honorato (2018, p. 36) descreve outras características e recursos do dinamismo presentes nos *softwares* de Geometria Dinâmica, que “impulsionam a exploração, como a habilitação de rastros e animações, que proporcionam também a mostra de diversos exemplos, com um feedback veloz dado pela tecnologia”.

Borsoi (2016) também destaca as contribuições que os *softwares* de Geometria Dinâmica proporcionam do ponto de vista cognitivo, quando comparados aos objetos manipuláveis em forma de sólidos geométricos:

[...] quando o aluno faz uso de recursos manipuláveis, como sólidos geométricos, por exemplo, as movimentações do objeto com as mãos são tão rápidas e inconscientes, que dificilmente fazem com que o aluno reflita sobre tais ações. Já no *software*, o aluno é obrigado a elaborar estratégias e a antecipar o resultado de um determinado movimento e isto é um ganho do ponto de vista

cognitivo (BORSOI, 2016, p. 24).

Outra característica importante do dinamismo é a visualização. Em ambientes de Geometria Dinâmica, ela merece destaque e é de suma importância, por suas potencialidades no ensino e na aprendizagem de Matemática. Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020, p. 51) a consideram como “protagonista” nesses processos, uma vez que:

A visualização envolve um esquema mental que representa a informação visual ou espacial. É um processo de formação de imagens que torna possível a entrada em cena das representações dos objetos matemáticos para que possamos pensar matematicamente. Ela oferece meios para que conexões entre representações possam acontecer. Assim, a visualização é protagonista na produção de sentidos e na aprendizagem matemática.

Em relação ao ensino de Geometria, de forma geral, Honorato (2018, p. 32) afirma que “a visualização é primordial para o ensino de Geometria e a utilização de tecnologia pode impulsionar o desenvolvimento dessa habilidade”.

Mesmo a visualização sendo primordial para compreender um conceito ou ideia matemática na resolução de um problema ou na demonstração de um teorema, não é dada a ela a mesma importância que é dada a um cálculo ou a uma demonstração algébrica, por exemplo. É o que aponta Honorato (2018), ao criticar a negligência desse aspecto nas perspectivas da Educação Matemática e da Matemática Pura:

[...] em ambas as áreas, existe uma negligência ao processo de visualização, pois para este é designado um papel secundário, ou seja, surge como uma confirmação dos conceitos matemáticos, como se a visualização acontecesse apenas após o quesito algébrico estar já consolidado. Existe certa relutância em aceitar o potencial da visualização dentro da resolução de um problema ou até mesmo na prova de um teorema matemático (HONORATO, 2018, p. 30).

Segundo o pesquisador, atualmente, as demonstrações algébricas, por exemplo, são mais utilizadas e aceitas do que uma demonstração visual. Entretanto, no ensino e na aprendizagem de Geometria, a visualização torna-se mais efetiva para a compreensão

de conceitos matemáticos do que a oralidade e a escrita, assumindo, assim, um papel importante nesse cenário, graças à evolução das tecnologias (SETTIMY; BAIRRAL, 2020).

Particularmente, dentro do panorama das pesquisas sobre as potencialidades das Tecnologias Digitais no ensino de Geometria Espacial, por meio da Geometria Dinâmica, destacadamente nos últimos anos, um dos *softwares* mais utilizados / pesquisados é o GeoGebra 3D, concebido por Idem (2017) como uma “tecnologia digital desenvolvida para o ensino e a aprendizagem de Matemática”, pois:

[...] a Matemática é uma característica intrínseca do programa. Suas ferramentas foram construídas de forma associada aos conhecimentos matemáticos, sendo assim, seu manuseio e utilização estão impregnados de ideias matemáticas, fazendo com que, na sua manipulação, se manifestem conhecimentos integrados sobre tecnologia digital e sobre Matemática (IDEM, 2017, p. 88).

Outra contribuição do *software* para o ensino de Geometria Espacial é destacada por Borsoi (2016) quando se refere às janelas de visualização do GeoGebra 3D comparadas aos livros didáticos:

Estes ambientes permitem que o aluno observe um sólido sob variados pontos de vista, diferentemente daquilo que se tem nos livros escolares. O aluno pode interagir com o objeto matemático e assim formar imagens mentais mais ricas e significativas. Ao manipular um objeto 3D via *software*, determinada representação aparece como uma das posições possíveis que o objeto pode assumir, e isso dá significado e movimento às imagens mentais que são criadas pelo aluno (BORSOI, 2016, p. 23).

Acreditamos, então, que os apontamentos até aqui apresentados sobre os principais elementos da Geometria Dinâmica credenciam nossa pesquisa que, como descrevemos a seguir, utiliza os *softwares* Poly e GeoGebra 3D, nos processos de ensino e de aprendizagem de Geometria Espacial, na perspectiva da exploração de suas potencialidades de experimentação didática (BORSOI, 2016; IDEM, 2017; HONORATO, 2018; BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020).

4 Apresentando a pesquisa em seu contexto

Nossa pesquisa, qualitativa em seus pressupostos e métodos, contemplou a realização de 3 encontros com 6 professores de Matemática do Ensino Médio, matriculados na disciplina EMA 726 – Tecnologias Digitais na Educação Matemática do Mestrado em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, oferecida no 1º semestre letivo de 2022, ministrada pelos 2º e 3º autores deste artigo.

Esses encontros aconteceram nas aulas síncronas da referida disciplina, que foram ministradas de forma remota pela plataforma *Google Meet*, com a duração de 3 horas, nas quais desenvolvemos as 3 atividades exploratórias com a utilização de Tecnologias Digitais em Geometria Espacial. Apresentamos um pequeno cronograma que descreve, sucintamente, os temas e os *softwares* utilizados em cada atividade exploratória desenvolvida.

Quadro 1 - Cronograma das atividades exploratórias

Atividade Exploratória	Tema	Software
1ª atividade exploratória	Relação de Euler	Poly
2ª atividade exploratória	Geometria de Posição	GeoGebra 3D
3ª atividade exploratória	Volume da Esfera	GeoGebra 3D

Fonte: Dados da Pesquisa

De forma bastante sintetizada, a partir da visualização e do dinamismo proporcionados pelos *softwares*: ao explorarmos a Relação de Euler, objetivamos centralmente discutir sua validação para poliedros convexos e para poliedros côncavos; ao explorarmos a Geometria de Posição, objetivamos centralmente discutir as possibilidades de construção das diversas posições entre retas e planos; e, finalmente, ao explorarmos o volume da esfera, objetivamos centralmente discutir uma possibilidade didática de dedução de sua tradicional fórmula.

Para a elaboração das atividades exploratórias, consideramos a definição de Martins Júnior (2015) que, em seu trabalho sobre as contribuições da realização de atividades exploratórias para a aprendizagem de derivadas no ensino de Cálculo I, orientado pelo 2º autor deste artigo, apresenta as atividades exploratórias como sendo um:

Conjunto de atividades, didaticamente planejadas, com o objetivo de permitir a exploração, a conjecturação, a dedução lógica, a indução, a intuição, a reflexão na ação e a mediação em relação aos

conteúdos abordados para possibilitar a construção de conhecimentos realizados por seus atores, sendo essas atividades livres ou guiadas e, usando para isso, os meios necessários que possam dinamizar a relação entre a teoria e a prática, e o ensino para a aprendizagem (MARTINS JÚNIOR, 2015, p. 58-59).

Já Alves (2010), em sua pesquisa sobre o ensino de funções, limites e continuidade em Ambientes Educacionais Informatizados, também orientada pelo 2º autor deste artigo, propõe atividades exploratórias por meio de explorações guiadas, mesmo que o elemento desencadeador da exploração seja um pouco mais rígido. Ele argumenta que esse tipo de exploração é fundamental para levar os alunos à elaboração de conjecturas.

Dessa forma, elaboramos nossas atividades exploratórias apoiando-nos em Martins Júnior (2015), visando a reflexão para a construção de novos saberes, procurando conduzir seu desenvolvimento de forma guiada, apoiando-nos em Alves (2010).

A seguir, escolhemos para descrição a 3ª atividade exploratória, na qual utilizamos o GeoGebra 3D. Destacamos, ainda, que uma descrição completa das 3 atividades exploratórias pode ser encontrada em Pacheco (2023).

5 Descrevendo o desenvolvimento da 3ª atividade exploratória

No início do encontro, realizado em junho de 2022, verificamos que todos estavam com o *software* GeoGebra aberto com a janela de visualização 3D. Em uma rápida introdução, explicamos que o encontro seria dividido em três partes. Na primeira, apresentaríamos mais algumas ferramentas do GeoGebra 3D; na segunda, motivaríamos os participantes a realizarem algumas construções simples na janela 3D; e, por fim, faríamos a dedução da fórmula do volume da esfera.

Compartilhando a tela do nosso computador, apresentamos mais algumas ferramentas da janela 3D não apresentadas no 2º encontro. Começamos com aquelas que possibilitam as construções de sólidos mais conhecidos, como pirâmides, prismas, cones, cilindros, tetraedros e cubos. À medida em que íamos apresentando as novas ferramentas, fazíamos algumas construções e, assim, fomos conduzindo a exploração.

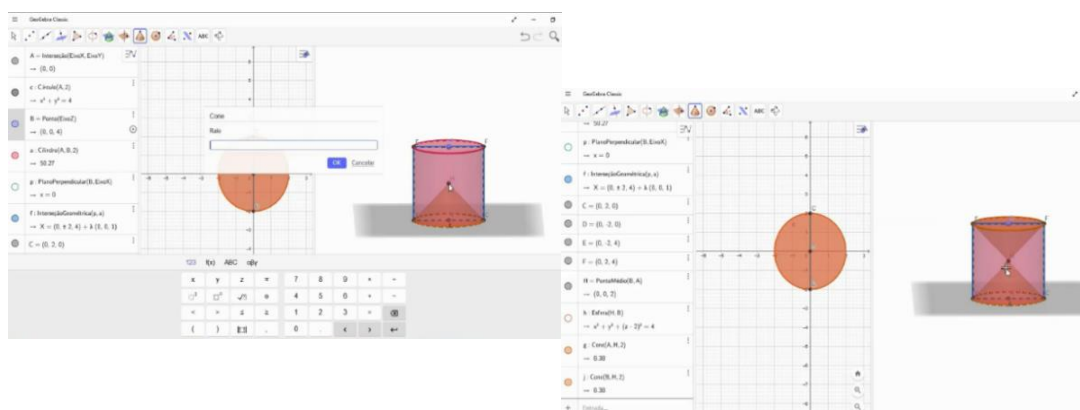
Descreveremos, de agora em diante, mais detalhadamente, apenas a parte final da

atividade exploratória, com foco na dedução da fórmula do volume da esfera. Para a identificação dos professores participantes, utilizamos nomes fictícios e identificaremos o 1º autor deste artigo por Pesquisador.

Como já tinha acontecido no desenvolvimento da 1ª e 2ª atividades exploratórias, comentamos sobre a importância de “misturarmos tecnologias” – no caso, a caneta digital e o GeoGebra 3D – não somente no encontro que acontecia de forma remota, mas também em sala de aula, onde podemos explorar os recursos tecnológicos, facilitando o ensino por meio da construção, da visualização e do dinamismo dos *softwares* utilizados.

Pedimos, então, aos professores participantes que construíssem um cilindro de raio da base 2 e altura 4. Em seguida, pedimos que alguém compartilhasse a tela conosco e, logo, o participante Ronan se prontificou a fazê-lo. Após uma discussão sobre cilindros equiláteros, pedimos a Ronan que construísse a esfera inscrita no cilindro e, na sequência, que escondesse a esfera e construísse dois cones inscritos, opostos e com os vértices no centro do cilindro, um em cada “metade” do cilindro e com as bases coincidindo com as bases do cilindro. A Figura 1, a seguir, mostra a construção feita por Ronan.

Figura 1 - Construção dos cones opostos pelo vértice inscritos no cilindro



Fonte: Acervo da Pesquisa

Trace, agora, o segmento que liga o vértice de um dos cones a sua base. Pode ser no cone de baixo. Em seguida, trace uma geratriz desse cone, ligando o vértice (ponto H) ao ponto C. Trace também o raio da base do cone, ligando o centro ao ponto C. Observem que

formou um triângulo. Que tipo de triângulo é esse tracejado?
(Pesquisador)

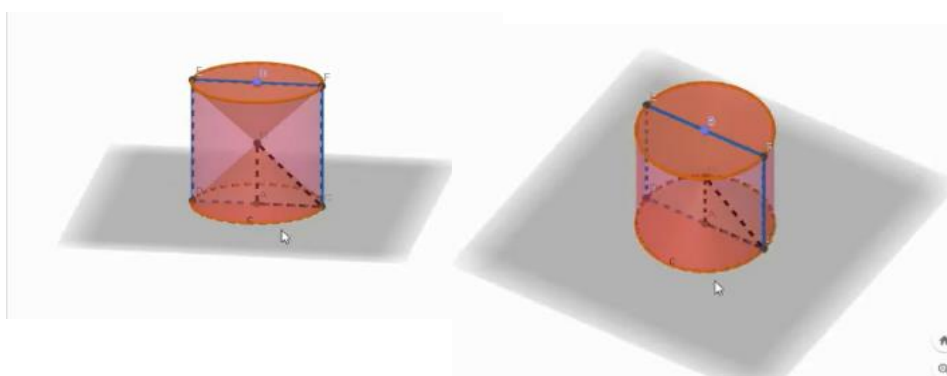
Isósceles. (Melchior)

Ele é retângulo e isósceles! Por que ele é isósceles? (Pesquisador),
Porque o raio da base tem a mesma medida da altura desse cone.
(Melchior)

Outra justificativa é que esse triângulo retângulo tem um ângulo de 45° . Logo, é isósceles. Todo mundo vê que os ângulos agudos são de 45° ? Estão lembrados que a seção meridiana do cilindro é um quadrado? Então, a hipotenusa desse triângulo é a metade da diagonal do quadrado. (Pesquisador)

A Figura 2, a seguir, mostra o triângulo retângulo e isósceles construído por Ronan. Concluímos, depois das discussões, que os catetos desse triângulo têm medidas iguais. Essa informação, bem como a própria figura dos cones inscritos no cilindro, foram fundamentais para a dedução do volume da esfera, como veremos nas descrições, a seguir.

Figura 2 – Triângulo retângulo e isósceles construído pelo Ronan



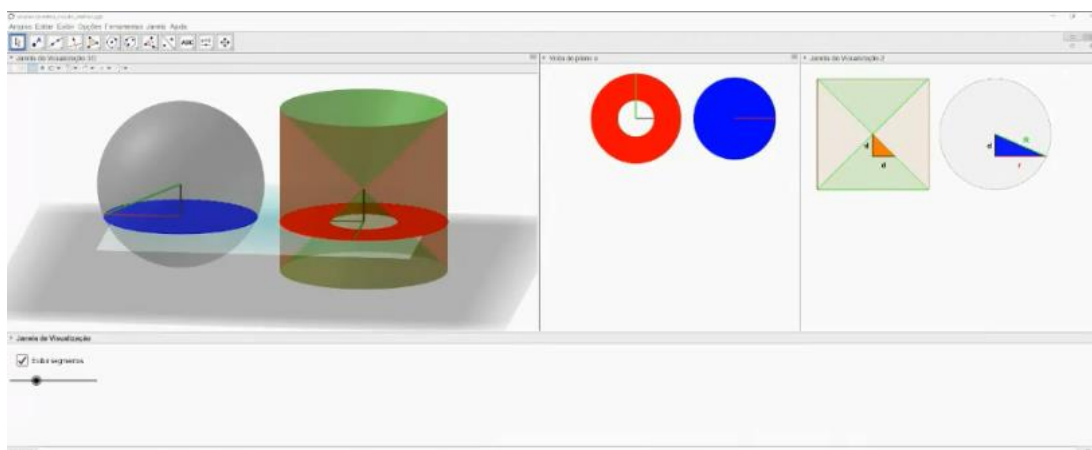
Fonte: Acervo da Pesquisa

Dando sequência à atividade, nossa proposta foi deduzir a fórmula do volume da esfera. Para tal, buscamos novamente no site <https://www.geogebra.org/> na aba “Materiais”, o aplicativo com o título “Demonstração do volume da esfera”, do autor Aroldo Eduardo Athias Rodrigues. A título de informação e curiosidade, perguntamos se alguém já tinha estudado a dedução da fórmula do volume da esfera, a partir do cilindro e de dois cones inscritos. Não muito surpreendente, a resposta foi um unânime

“Não”.

Compartilhando a tela do nosso computador com o arquivo citado anteriormente, descrevemos os elementos principais nas quatro janelas de visualização, como mostra a Figura 3, a seguir.

Figura 3 - Elementos principais nas janelas de visualização



Fonte: Elaborado pelos autores, adaptado de <https://www.geogebra.org/m/sOrWGb2b>

Observem na tela que aquela figura construída anteriormente pelo Ronan, do cilindro, da esfera inscrita e dos dois cones inscritos, está aqui representada na janela 3D, à esquerda. Para facilitar a visualização e a dedução, a esfera está fora do cilindro. Na janela 3D, vemos um plano α , paralelo às bases do cilindro, que secciona a esfera formando um círculo azul. Já a intersecção desse mesmo plano α com o cilindro retirando o cone, é a coroa circular vermelha. Tanto o círculo azul como a coroa circular vermelha podem ser vistos claramente na janela do meio “vista do plano α ”. Nosso objetivo é mostrar que a área do círculo azul é igual à área da coroa vermelha, qualquer que seja a posição em que o plano paralelo α secciona a esfera, o cilindro e os cones. Observando a janela 3D, o que é o segmento verde na esfera? (Pesquisador)

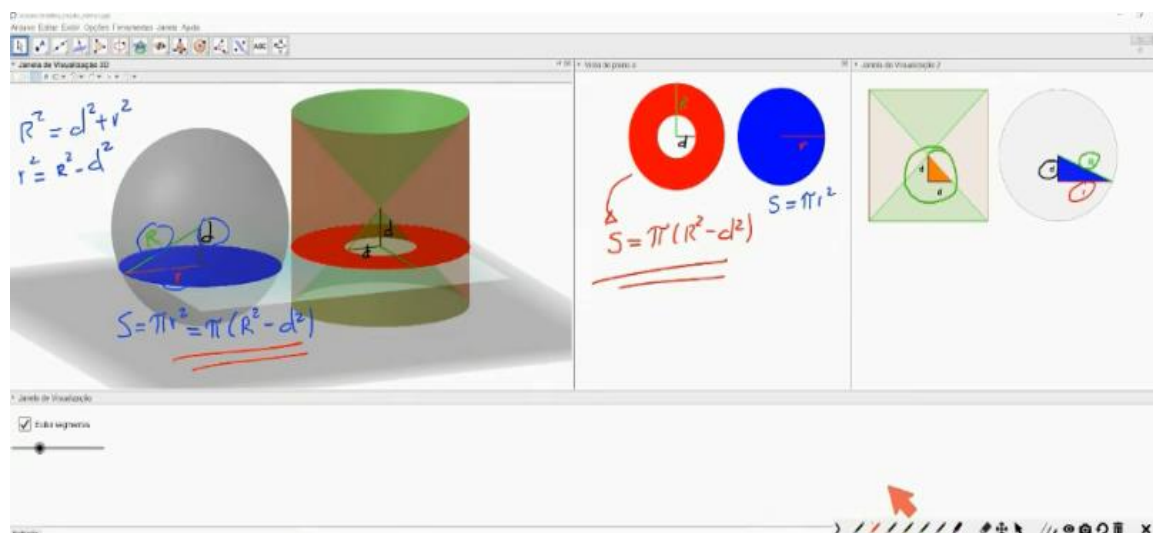
O raio da esfera. (Marcos)

Certo! Observemos também o segmento vermelho que é o raio do círculo azul e o segmento preto que é a distância do centro da esfera e do cilindro ao plano α . Podemos observar esses mesmos elementos na janela de visualização 2, do lado direito da tela, onde

temos a vista frontal. Na coroa circular vermelha, por sua vez, podemos observar o mesmo segmento verde, que é o raio da esfera. Ele também é o raio do cilindro. Portanto, é o raio maior da coroa. Já o raio menor da coroa é um dos catetos do triângulo retângulo isósceles construído pelo Ronan, na atividade guiada anterior, vocês lembram? Portanto, ele é do mesmo tamanho que o segmento preto, que é a distância do plano α ao centro. (Pesquisador)

Nesse momento, demonstramos algebricamente, na tela do computador, usando a caneta digital, que a área da coroa circular vermelha é igual à área do círculo azul para qualquer plano α paralelo ao plano da base, parte fundamental da demonstração, como mostra a Figura 4, a seguir.

Figura 4 – Demonstração da equivalência entre as áreas da coroa e do círculo



Fonte: Acervo da Pesquisa

Para concluirmos a atividade deduzindo a fórmula do volume da esfera, recordamos um princípio fundamental sobre volumes:

Se pegarmos dois sólidos, com a mesma altura, e passarmos planos que formam seções nos dois sólidos de mesma área, esses sólidos têm volumes iguais. Que princípio é esse? (Pesquisador)

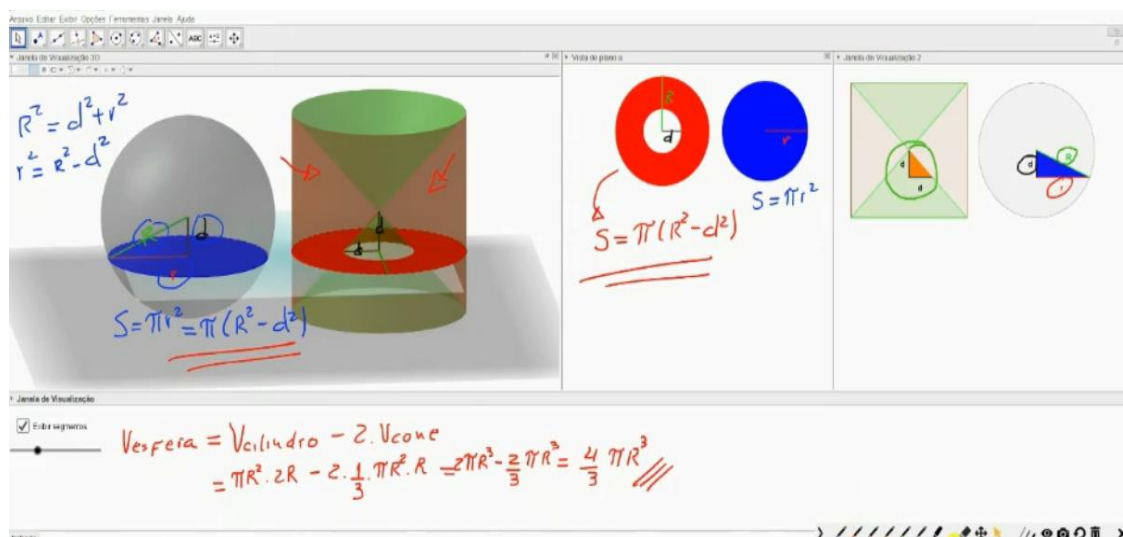
Princípio de Cavalieri. (Marcos)

Exatamente! Vamos aplicá-lo? (Pesquisador)

Retomando a tela do computador, com a caneta digital e com base no Princípio de Cavalieri, cuja aplicação nesse caso foi devidamente justificada pelo que

anteriormente demonstramos em relação à equivalência de áreas, deduzimos algebricamente a fórmula do volume da esfera, considerando que seu volume é igual ao volume do sólido formado pela reunião de todas as secções formadas pelas coroas circulares vermelhas, ou seja, é o volume do cilindro, menos o volume dos dois cones. A Figura 5, a seguir, mostra essa dedução.

Figura 5 – Dedução da fórmula do volume da esfera



Fonte: Acervo da Pesquisa

Vocês disseram, anteriormente, que nunca tinham visto a dedução da fórmula do volume da esfera, certo? (Pesquisador)

Na verdade, eu me lembrei, agora, que já havia visto essa demonstração num livro em espanhol, mas não com essa riqueza de detalhes. (Marcos)

Na visão de vocês, o que mais contribuiu para a dedução dessa fórmula? Alguém pode comentar? (Pesquisador)

A visualização dos sólidos. (Marcos)

6 Contribuições para o ensino de Geometria Espacial

Analisando os encontros realizados que foram devidamente gravados pela plataforma *Google Meet*, mediante autorização dos professores participantes, e suas respostas a um questionário de identificação e avaliação, foi-nos possível identificar um conjunto de contribuições das atividades exploratórias para o ensino de Geometria Espacial.

Uma primeira contribuição que podemos destacar é o fato de que as atividades

exploratórias primaram, basicamente, pelo dinamismo e pela visualização proporcionados pelas Tecnologias Digitais com a utilização dos *softwares* de Geometria Dinâmica utilizados, Poly e GeoGebra 3D. É o que podemos observar, em linhas gerais, nas transcrições das atividades.

A 1ª atividade exploratória com o *software* Poly destacou-se pela riqueza, variedade e diversidade dos poliedros convexos em suas categorias. A fácil manipulação dos poliedros com suas belas visualizações e planificações proporcionaram investigações pouco ou nada exploradas em sala de aula, até então, pelos professores participantes, principalmente, pela impossibilidade de se desenhar certos poliedros.

Também destacamos, no início caminho trilhado na investigação, a exploração e a descoberta dos poliedros arquimedianos no processo sucessivo de “truncar”, a partir dos poliedros platônicos, gerando, assim, a “esferização” dos poliedros, corroborando com Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020, p. 22) quando afirmam que o “dinamismo pode ser atribuído às possibilidades em podermos utilizar, manipular, combinar, visualizar e construir virtualmente objetos geométricos, permitindo traçar novos caminhos de investigação”.

Ainda sobre as contribuições do dinamismo para o ensino de Geometria Espacial, os recursos presentes nos *softwares* de Geometria Dinâmica, impulsionaram a exploração, numa perspectiva muito próxima dos recursos descritos por Honorato (2018, p. 36).

Sobre tais recursos, trazemos dois momentos que reforçam Honorato (2018). O primeiro foi a possibilidade de construção e exploração dos elementos do cone de revolução, na construção proposta pelo participante Marcos:

Posso partilhar uma ideia que eu tive agora? (Marcos)

Claro! (Pesquisador)

Construa uma circunferência, de centro na origem e raio qualquer. Marque um ponto sobre ela. Em seguida, marque outro ponto sobre o eixo z. Ligue esses pontos, por meio de um segmento. Agora, use o comando “Habilitar Rastro” desse segmento. Finalmente, mova o ponto sobre a circunferência. (Marcos)

O que se pode mostrar com isso, Marcos? (Pesquisador)

Que o cone possui infinitas geratrizes? (Marcos)

Sim! Mais que isso... (Pesquisador)

Que o cone é um sólido de revolução? (Marcos)

Isso! (Pesquisador)

No fundo, quando você está movimentando a geratriz, o que gira é um triângulo retângulo. A geratriz é o que desse triângulo? (Pesquisador)

É a hipotenusa, não? (Marcos)

Sim! E quem são os catetos? (Pesquisador)

A altura do cone e o raio da base. (Marcos)

Exatamente! Quando você gira o triângulo retângulo, sendo a altura e o raio os mesmos, tem-se infinitas geratrizes, o que mostra que o cone é um sólido de revolução. Ótima ideia, Marcos! Não havíamos pensado nessa possibilidade de construção do cone de revolução. (Pesquisador)

Já um segundo momento foi a exploração dos elementos da esfera e da seção meridiana quando, “escondendo-se” o plano da seção e a própria esfera, obtemos a relação pitagórica entre o raio da esfera, raio da seção meridiana e a distância entre os centros da seção e da esfera, mais evidente pela visualização.

A visualização, como já mencionamos, também teve grande destaque em todas as atividades exploratórias. Aqui, retomamos novamente Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020, p. 51) que consideram a visualização como “protagonista” nos processos de ensino e de aprendizagem.

Um momento enriquecedor quanto à visualização foi a apresentação das 3 janelas de visualização do GeoGebra 3D por meio de um *aplett* baixado da internet, na 3ª atividade exploratória. A visualização e o dinamismo do aplicativo do GeoGebra 3D foram fundamentais para a dedução algébrica da fórmula do volume da esfera, corroborando com Borsoi (2016, p. 23) quando se refere às janelas de visualização do GeoGebra 3D comparadas aos livros didáticos de Geometria Espacial.

Outra contribuição que merece destaque é que as atividades exploratórias possibilitaram certas construções características do Desenho Geométrico, revisitadas pelas Tecnologias Digitais.

Nas 2ª e 3ª atividades exploratórias, nas quais usamos o *software* GeoGebra 3D, as construções geométricas foram fundamentais à exploração, tanto dos conteúdos de

geometria de posição quanto aos de geometria métrica. Especificamente, a 2ª atividade exploratória foi totalmente desenvolvida em cima das construções geométricas. Dessa forma, podemos notar claramente o que alguns autores vêm apontando quando se utiliza os *softwares* de Geometria Dinâmica no ensino e na aprendizagem matemática, sobre a importância da construção geométrica e sua distinção do desenho, como descrevem Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020, p. 23).

Outro momento importante da 2ª atividade exploratória sobre as construções geométricas que corrobora com Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020, p. 23) pode ser observado quando Marcos construiu um cubo de centro na origem, resistindo à “prova do arrastar”.

Além disso, há um momento curioso na descrição da 3ª atividade exploratória que reforça ainda mais a afirmação de Idem (2017) quanto à natureza matemática do GeoGebra. Enquanto Marcos apresentava uma construção geométrica para a determinação do centro da esfera inscrita no cilindro por meio da intercessão das diagonais do quadrado da seção meridiana, Ronan determinava o centro pelo simples comando “Ponto Médio ou Centro”.

Outra contribuição das atividades exploratórias, especialmente, da 1ª delas, pode ser atribuída ao fato da valorização da importância da planificação de sólidos geométricos que, inclusive, tem sido tema de questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Como destacamos anteriormente, a 1ª atividade exploratória, com a utilização do *software* Poly, possibilitou aos professores participantes a manipulação e a visualização da planificação de vários poliedros. Esse tema, tradicionalmente, é pouco explorado em sala de aula, talvez, pela dificuldade de “visualização prática” de alunos e até mesmo de professores. Quando trabalhado, normalmente, é apresentado somente por meio da planificação dos poliedros platônicos em forma de figuras nos livros didáticos, ou ainda com dobraduras de papel ou outro material manipulável. Até mesmo a confecção desses materiais foi destaque nos diálogos entre os professores participantes, comparando o avanço das tecnologias em relação ao material concreto.

Outra grande contribuição das atividades exploratórias para o ensino de Geometria Espacial residiu nas múltiplas possibilidades de caracterização dos elementos dos sólidos geométricos. Inicialmente, destacamos que, em relação à caracterização e identificação dos elementos dos sólidos geométricos, tais como vértices, faces e arestas, foi notória a facilidade que o *software* Poly proporciona, tanto no aspecto

visual (cores, contrastes e possibilidades de modos de visualização), quanto no aspecto manipulativo (movimentação e planificação). Ao analisarmos a 1ª atividade exploratória, recordamos o que Borsoi (2016, p. 24) afirma quanto às contribuições que os *softwares* de Geometria Dinâmica proporcionam do ponto de vista cognitivo, quando comparados aos objetos manipuláveis em forma de sólidos geométricos.

Também a utilização do GeoGebra 3D na 3ª atividade exploratória possibilitou a identificação e a caracterização mais facilmente dos principais elementos da pirâmide regular, como apótema da pirâmide, apótema da base e altura, e do cone, como geratriz, raio da base e altura, além dos elementos da esfera.

Considerações Finais

Como conclusões de nossa pesquisa, podemos considerar que todas as contribuições das atividades exploratórias que desenvolvemos com professores de Matemática do Ensino Médio, sob certa medida, apontam para a necessidade de uma ressignificação de um ensino de Geometria Espacial para além da “tradicional e acomodada” aplicação de fórmulas.

Conforme já mencionamos anteriormente, uma das questões preocupantes abordadas por pesquisadores em relação ao ensino de Geometria Espacial é a sua “algebrização”, caracterizada pelo uso excessivo de fórmulas e cálculos, como também pela dificuldade da construção do pensamento geométrico gerada pela falta de uma abordagem investigativa dos elementos e propriedades dos sólidos geométricos.

Procurando contribuições na tentativa de minimizar essa problemática, percebemos em todas as atividades exploratórias, uma possibilidade real de se repensar / redirecionar o ensino de Geometria Espacial. Toda a dinâmica de execução das atividades buscou evidenciar a compreensão, a reconstrução e consolidação das características e propriedades geométricas nos conteúdos elencados. As fórmulas e os cálculos surgiram ou foram introduzidos nas discussões quase que naturalmente, complementando a compreensão do pensamento geométrico, o que não significa que as fórmulas e os cálculos são menos importantes ou que devam ficar em um segundo plano.

Na 3ª atividade exploratória, especificamente, na qual deduzimos a fórmula do

volume da esfera, a “preparação preliminar do terreno geométrico” para “plantar a álgebra”, deveu-se ao dinamismo proporcionado pelo GeoGebra 3D e o caráter exploratório da atividade. Seu desenvolvimento mostrou, então, que a visualização e o dinamismo do *software* deram sustentação para a dedução algébrica da fórmula do volume da esfera, e não apenas após a demonstração para se “confirmar o conceito matemático”.

Portanto, há que repensar / ressignificar os processos de ensino e de aprendizagem de Geometria Espacial no Ensino Médio, por meio da valorização da valorização da visualização e do dinamismo proporcionados por *softwares* dinâmicos, visando uma abordagem investigativa e exploratória que, de fato, contribua para uma sólida construção do pensamento geométrico.

Agradecimentos

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e à Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), pelo apoio financeiro.

Referências

ALVES, D. O. **Ensino de Funções, Limites e Continuidade em Ambientes Educacionais Informatizados**: uma proposta para cursos de Introdução ao Cálculo. 2010. 152f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R. R. S.; GADANIDIS, G. **Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática**: sala de aula e internet em movimento. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2020.

BORSOI, C. **GeoGebra 3D no Ensino Médio**: uma possibilidade para a aprendizagem da Geometria Espacial. 2016. 159f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

CARVALHO, P. C. P. **Introdução a Geometria Espacial**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1999.

HONORATO, V. S. **Elaborando atividades matemáticas com o software GeoGebra**. 2018. 157f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

IDEM, R. C. **Construcionismo, conhecimentos docentes e GeoGebra**: uma experiência

envolvendo licenciandos em Matemática e professores. 2017. 163f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? **Educação Matemática em Revista**, Blumenau, v. 3, n. 4, p. 3-13, 1995.

MARTINS, E. M.; REIS, F. S.; FERRERA, G. C. G. The GeoGebra Software in the introductory teaching of Dynamic Systems. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, São Paulo, v. 12, n. 1, p. 4-28, 2023.

MARTINS JÚNIOR, J. C. **Ensino de Derivadas em Cálculo I**: aprendizagem a partir da visualização com o uso do GeoGebra. 2015. 123f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

MENESES, R. S. **Uma história da Geometria escolar no Brasil**: de disciplina a conteúdo de ensino. 2007. 172f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

PACHECO, C. B. L. **Tecnologias Digitais em Geometria Espacial no Ensino Médio**: experiências e perspectivas no contexto do Ensino Híbrido. 2023. 158f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

PEREIRA, L. D. **Projetos de Modelagem Matemática no ensino para a aprendizagem de Geometria Espacial no 2º ano do Ensino Médio**. 2017. 123f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

REIS, F. S.; COMETTI, M. A.; SANTOS, E. C. Contribuições do GeoGebra 3D para a aprendizagem de Integrais Múltiplas no Cálculo de Várias Variáveis. **REnCiMa**, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 15-29, 2019.

SETTIMY, T. F. O.; BAIRRAL, M. A. Dificuldades envolvendo a visualização em Geometria Espacial. **Vidya**, Santa Maria, v. 40, n. 1, p. 177-195, 2020.

SILVA, B. A. T. **Um estudo sobre Geometria Espacial**: conhecimentos e dificuldades expressos por alunos do Ensino Médio. 2010. 161f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo.