

Desenhos prototípicos, não prototípicos e que mais se aproximam dos prototípicos: uma caracterização acerca dos paralelogramos

JAILSON CAVALCANTE DE ARAÚJO¹

LÚCIA DE FÁTIMA DURÃO FERREIRA²

PAULA MOREIRA BALTAR BELLEMAIN³

Resumo

Este artigo, recorte de uma pesquisa de doutorado, tem por objetivo apresentar uma caracterização para os desenhos de paralelogramos e uma análise dos desenhos priorizados em uma coleção de livros didáticos para os anos finais do Ensino Fundamental. O aporte teórico-metodológico é a Engenharia Didática na perspectiva de Artigue e Brousseau. O recorte aqui discutido versa sobre as vertentes epistemológica e didática das análises prévias da Engenharia Didática, por meio das quais foi feito um levantamento de pesquisas já realizadas que discutem desenhos prototípicos, e a análise de uma coleção de livros didáticos. Em relação aos resultados, foi possível confirmar o que apontam pesquisas anteriores em termos de quais desenhos dos paralelogramos são prototípicos e que há uma prioridade por eles nos livros didáticos analisados.

Palavras-chave: engenharia didática; geometria; livros didáticos; paralelogramos.

Abstract

This article, a segment of a doctoral research project, aims to provide a characterization for the drawings of all parallelograms and an analysis of the drawings prioritized in a collection of textbooks for the final years of elementary education. The theoretical-methodological framework employed is Didactic Engineering from the perspective of Artigue and Brousseau. The focus here revolves around the epistemological and didactic aspects of previous Didactic Engineering analyses. This involves a survey of existing research discussing prototypical drawings and the analysis of a collection of textbooks. Regarding the results, it was possible to affirm findings consistent with previous research regarding which drawings of parallelograms are considered prototypical and the observed prioritization of these drawings in the analyzed textbooks.

Keywords: didactic engineering; geometry; textbooks; parallelograms.

Introdução

No campo da Geometria, uma figura pode ser representada de distintas maneiras e, entre elas, as representações gráficas, ou seja, os desenhos, costumam ser as mais tomadas pelos estudantes como apoio para resolução de uma tarefa. No entanto, esses desenhos podem aparecer de diferentes maneiras e, em alguns deles, os estudantes sentem dificuldades em aceitar que se trata de uma mesma figura. É nessa perspectiva que realizamos este estudo acerca dos desenhos de todos os paralelogramos (quadrados, retângulos não quadrados, losangos não quadrados e paralelogramos não

¹ Universidade Federal de Pernambuco – e-mail: jailson.cavalcante@ufpe.br

² Universidade Federal de Pernambuco – e-mail: email.luciadurao@gmail.com

³ Universidade Federal de Pernambuco – e-mail: paula.bellemain@ufpe.br

retângulos e não losangos).

Em pesquisas anteriores realizadas na França e no Brasil, como Laborde e Capponi (1994) e Santos (2005), respectivamente, apenas o desenho prototípico⁴ do paralelogramo não retângulo e não losango foi discutido, como veremos mais adiante. Assim, além da necessidade de ampliar essa caracterização para os demais paralelogramos, notamos que havia uma classificação intermediária, isto é, entre aqueles desenhos considerados prototípicos ou não prototípicos existiam outros que não eram exatamente prototípicos, mas que mais se aproximavam dos prototípicos. Assim, a partir de pesquisas já realizadas, como Laborde e Capponi (1994), Santos (2005), Teles (2007), Menegotto e Lara (2011) e Araújo (2018), apresentamos uma caracterização para os desenhos de todos os paralelogramos e mapeamos a incidência deles em uma coleção de livros didáticos (LD) para os anos finais do Ensino Fundamental.

Diante do exposto, este artigo é um recorte de uma pesquisa de doutorado (Araújo, 2023) e tem como objetivo apresentar uma caracterização para os desenhos de paralelogramos e uma análise dos desenhos priorizados em uma coleção de livros didáticos para os anos finais do Ensino Fundamental.

A seguir, discutiremos sobre definições e propriedades dos paralelogramos ao longo do tempo e, posteriormente, apresentaremos aqueles desenhos que categorizamos como prototípicos, não prototípicos e que mais se aproximam dos prototípicos, no caso dos paralelogramos. Em seguida, abordaremos os aspectos metodológicos, os resultados do mapeamento desses desenhos em uma coleção de livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental e algumas conclusões.

1 Os paralelogramos: definições e propriedades

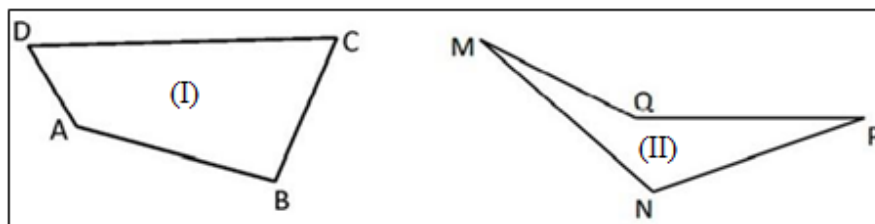
Antes de passarmos à discussão relativa às definições dos paralelogramos, gostaríamos de definir quadrilátero, pois iremos abordar alguns deles. Segundo Lima e Carvalho (2010, p. 154):

Consideremos quatro pontos arbitrários em um plano, por exemplo, A, B, C, D, com a condição de que três quaisquer deles não estão em uma mesma reta. Chamamos quadrilátero ABCD ao conjunto de pontos que estão nos segmentos de reta AB, BC, CD e DA. [...] podemos também designar este quadrilátero por outras sequências apropriadas dos símbolos A, B, C e D.

Vejamos alguns deles na Figura 1:

⁴ De modo geral, são aqueles mais comuns no ensino, privilegiados nos livros didáticos ou pelo professor durante as aulas. Discutiremos mais profundamente esse termo na seção 2 deste artigo.

Figura 1 – Representação de quadriláteros



Fonte: Lima e Carvalho (2010, p. 154, adaptada)

Os paralelogramos assim como os trapézios pertencem a um grupo de quadriláteros específico, os notáveis, sobre os quais, apoiados em Pereira da Costa (2019), podemos apontar algumas de suas características, tais como: fazem parte do plano euclidiano, nenhum de seus ângulos internos possui abertura maior que 180° , suas diagonais se interceptam em um único ponto e possuem pelo menos um par de lados opostos paralelos.

Na figura 1, temos a representação de dois quadriláteros não notáveis: o (I) é um trapézio, o qual é um quadrilátero convexo que não possui lados opostos paralelos; o (II) é não convexo, ou seja, “há um ângulo, no qual a medida de sua abertura é maior que 180° . As diagonais não se encontram em nenhum ponto, sendo que uma delas possui pontos, incluídos no segmento de reta que as formam, fora da região interna” (Pereira da Costa, 2019, p. 47).

No que refere às diferentes definições dos quadriláteros notáveis, mais especificamente os utilizados neste artigo (quadrado, retângulo não quadrado, losango não quadrado e paralelogramo não retângulo e não losango), ao longo do tempo e suas evoluções, Bongiovanni (2004), em um texto cedido pela Sociedade Brasileira de Matemática, inicialmente publicado na Revista do Professor de Matemática (RPM)⁵ aponta que as primeiras ideias da Geometria têm suas origens na Grécia e que a estudada hoje nas escolas é originária do livro *Os Elementos*, de Euclides (aproximadamente 300 a.C.). Nessa obra, Bongiovanni (2004, p. 1) diz que ele apresentava as seguintes definições para:

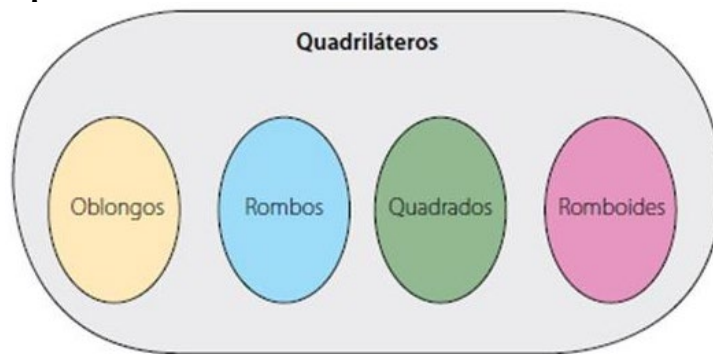
- o quadrado: “figura quadrilátera de quatro lados iguais e com ângulos retos”;
- o oblongo (caso particular do retângulo): “figura quadrilátera com ângulos retos, mas que não tem quatro lados iguais”;
- o rombo (caso particular do losango): “figura quadrilátera com quatro lados iguais, mas não com ângulos retos”;

⁵ <https://www.rpm.org.br/>

- romboide (caso particular do paralelogramo): “figura quadrilátera que tem lados e ângulos opostos iguais entre si, mas não tem quatro lados iguais nem ângulos retos”.

A partir das definições acima, não é possível realizar a inclusão de classes entre as figuras. Por exemplo, os quadrados não são oblongos porque apesar de ambos terem os ângulos retos, os comprimentos dos quatro lados do quadrado são iguais e os oblongos não têm os quatro lados iguais. A Figura 2, a seguir, representa a classificação dos quadriláteros notáveis, segundo os Elementos de Euclides. Podemos dizer que os oblongos correspondem aos retângulos não quadrados, os rombos aos losangos não quadrados e os romboides aos paralelogramos não retângulos e não losangos.

Figura 2 – Representação da classificação de quadriláteros notáveis a partir da definição dada por Euclides



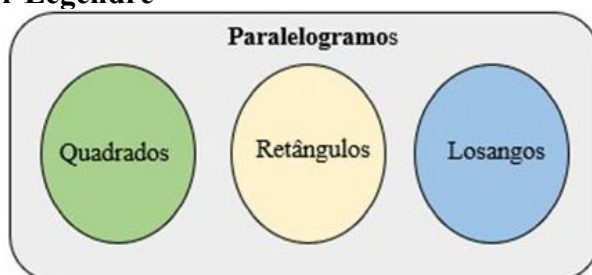
Fonte: Bongiovanni (2004, p. 1)

Bongiovanni (2004, p. 2) menciona um texto posterior à obra de Euclides, o qual também teve grande importância no ensino que é *Os Elementos de Geometria*, de Legendre (1793). Nele, observamos as seguintes denominações e definições:

- o quadrado: “tem seus lados iguais e seus ângulos retos”;
- o retângulo: “tem ângulos retos sem ter os lados iguais”;
- o losango: “tem os lados iguais sem que os ângulos sejam retos”;
- o paralelogramo: “tem os lados opostos paralelos”.

Na classificação dos quadriláteros feita por Legendre, o nome retângulo corresponde aos oblongos de Euclides; o losango corresponde ao que Euclides chama de rombos; já a classe dos paralelogramos corresponde ao agrupamento dos quadrados, oblongos, rombos e romboides de Euclides. Assim, podemos notar uma classificação menos restritiva em relação ao paralelogramo, a partir da qual é possível considerar o quadrado, o retângulo e o losango como sendo paralelogramos. A ilustração da Figura 3 ajuda na visualização:

Figura 3 – Representação da classificação dos paralelogramos a partir da definição dada por Legendre



Fonte: Araújo (2023, p. 46)

No último texto discutido por Bongiovanni (2004, p. 2), o Tratado de Hadamard (1898), *Leçons de Géométrie Élémentaire*, as definições eram assim apresentadas:

- o quadrado: “é um quadrilátero que tem todos os lados iguais e todos os ângulos iguais”;
- o retângulo: “é um quadrilátero que tem todos os ângulos iguais e, conseqüentemente, retos”;
- o losango: “é um quadrilátero que tem os quatro lados iguais”;
- o paralelogramo: “é um quadrilátero que tem os quatro lados paralelos dois a dois”.

Percebemos que, após muitos anos, nesse livro as definições aparecem menos restritivas e, conseqüentemente, inclusivas, a partir das quais o quadrado é retângulo e losango ao mesmo tempo, da mesma maneira que ambos são paralelogramos, conforme ilustrado na Figura 4:

Figura 4 – Representação da classificação dos paralelogramos a partir da definição dada por Hadamard



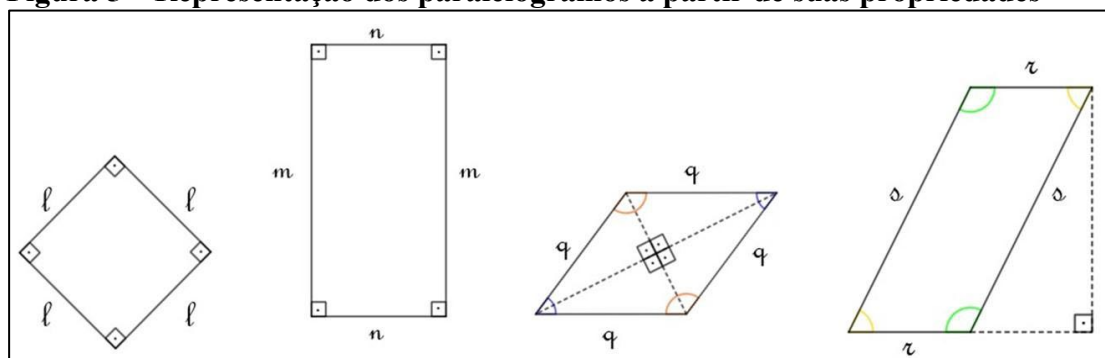
Fonte: Araújo (2023, p. 47)

Diante do exposto, percebemos que os paralelogramos passaram por distintas definições na visão dos autores ao longo do tempo. Adotamos neste trabalho a última classificação acima, a qual, segundo Pereira da Costa (2019), é a versão mais aceita nos dias de hoje e bastante abordada nos LD de Matemática no Brasil. Entretanto, temos clareza que essa classificação não é unânime desde os tempos remotos nem

tampouco universal.

Não consideramos o paralelogramo como sendo trapézio por este último ter exatamente dois lados paralelos ou, conforme Machado (2012), possui um único par de lados opostos paralelos entre si. Já o paralelogramo é um quadrilátero com exatamente dois pares de lados opostos paralelos entre si. Além disso, destacamos a propriedade⁶ de que lados e ângulos opostos são congruentes (Barbosa, 2006; Moura, 2013). Com isso, corroboramos com Pereira da Costa (2016) ao argumentar que os quadrados são retângulos e são losangos, pois apresentam as mesmas propriedades, ou seja, possuem os lados opostos paralelos, ângulos internos opostos congruentes e as diagonais se cortam ao meio. “Nesse sentido, dizemos que quadrado é todo paralelogramo que é retângulo e losango ao mesmo tempo” (Pereira da Costa, 2016, p. 58). A Figura 5 ilustra cada um dos paralelogramos, evidenciando essas propriedades relativas aos lados e ângulos opostos.

Figura 5 – Representação dos paralelogramos a partir de suas propriedades



Fonte: Araújo (2023, p. 48)

Ainda em relação aos paralelogramos, Machado (2012) alerta para o fato de que: “[...] todo quadrado é um retângulo, e todo retângulo é um paralelogramo, mas as relações recíprocas não são verdadeiras. Observe também que todo quadrado é um losango, mas nem todo losango é um quadrado” (p. 108).

Após esse momento de definições e algumas propriedades, podemos avançar na discussão sobre os paralelogramos, destacando agora seus diferentes desenhos e as características daqueles que são mais comuns no ensino, privilegiados pelos livros didáticos ou pelo professor durante as aulas, os chamados desenhos prototípicos.

2 Os paralelogramos e suas representações

A princípio, consideramos pertinente diferenciar três tipos de objetos no campo da Geometria para ajudar na compreensão das ideias discutidas nesta seção: objeto

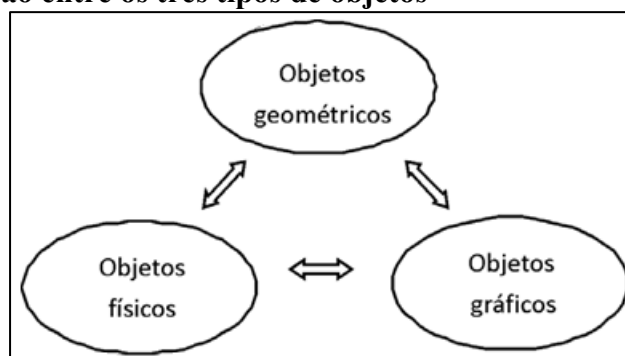
⁶ Outras propriedades dos paralelogramos com as respectivas demonstrações dadas por diferentes autores podem ser encontradas no Anexo A da dissertação de Araújo (2018).

geométrico, objeto físico e objeto gráfico. Lima e Carvalho (2010) relatam que conceitos matemáticos (relativos a objetos geométricos) devem estar associados aos objetos físicos e às suas representações (objetos gráficos). Segundo eles, ao definirmos um quadrado, temos

[...] a definição de um objeto abstrato, no qual não podemos efetuar medições com instrumentos concretos. Nos exemplos concretos de quadrados – desenhados ou construídos de algum material adequado – as medições fornecerão sempre igualdades aproximadas dos comprimentos dos lados e das aberturas dos ângulos em jogo. Além disso, no que se refere à definição geométrica, o comprimento do lado do quadrado pode ser concebido em centímetros, em metros, ou em qualquer outra unidade de comprimento (Lima; Carvalho, 2010, p. 137).

Diante das ideias acima, os três tipos de objetos – geométricos, físicos e gráficos – se relacionam conforme representado na Figura 6, proposta pelos autores supracitados:

Figura 6 – Relação entre os três tipos de objetos



Fonte: Lima e Carvalho (2010, p. 138)

Como exemplificação para a relação acima, estes autores tomam um dado (objeto físico) que pode ser representado por um desenho (objeto gráfico) e associado a um cubo (objeto geométrico). Laborde e Capponi (1994) consideram que o desenho é a representação gráfica de uma ideia. Ele se diferencia do objeto geométrico (elemento abstrato) porque possui imperfeições. Cabe ressaltar que, assim como Lima e Carvalho (2010, p. 191), uma superfície ou figura geométrica é utilizada neste artigo “[...] para designar tanto um objeto físico, um desenho ou imagem quanto uma figura geométrica bidimensional propriamente dita [...]”.

Feito isso, antes de passarmos a algumas representações dos paralelogramos, vamos falar brevemente do termo prototípico. Segundo Laborde e Capponi (1994, p. 53), “desenhos prototípicos de objetos geométricos constituíram-se ao longo do tempo, resultantes de influências ao mesmo tempo perceptivas e culturais (em sentido amplo e escolar)”. Ainda sobre este assunto, Menegotto e Lara (2011, p. 38) apontam que:

o termo “figura prototípica” foi introduzido por Rina Hershkowitz no ensino da Geometria na década de 1990. Protótipos, segundo Baruch e Hershkowitz (1999), correspondem a alguns exemplos mais centrais do que

outros para a aprendizagem, exemplos que podem ser vistos como membros de uma categoria que reflete melhor a “estrutura de redundância” da categoria como um todo. Baruch e Hershkowitz (1999) referem os estudos de Rosch e Mervis publicados em 1975, segundo os quais os exemplos tidos como prototípicos geralmente são usados como “pontos de referência cognitiva” para a formação e julgamento sobre outros exemplos da categoria.

Nesse sentido, a caracterização de um desenho como prototípico se apoia numa percepção de que ele representa mais imediatamente aquela classe de figuras e isso se apoia, entre outros fatores, na alta taxa de presença desse tipo de desenho para representar certo objeto matemático.

Em relação ao desenho prototípico do paralelogramo não retângulo e não losango, Laborde e Capponi (1994, p. 53) apontam que “o desenho prototípico de um paralelogramo é, ao menos na França, aquele em que a diagonal AC é perpendicular ao lado AD [...]”, conforme mostrado na Figura 7:

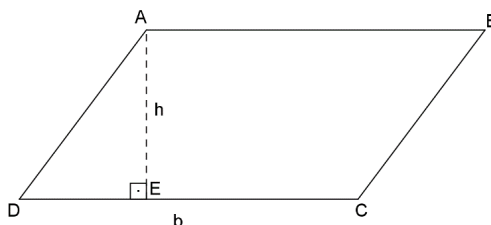
Figura 7 – Desenho prototípico do paralelogramo não retângulo e não losango na França



Fonte: Laborde e Capponi (1994, p. 53, adaptada)

Santos (2005) comparou as características do desenho do paralelogramo não retângulo e não losango considerado prototípico na França e no Brasil e notou aproximações, tais como o lado de maior comprimento na posição horizontal e a inclinação para a direita. Além dessas características, Teles (2007) pontuou que sua altura traçada é sempre interna, relativa ao lado de maior comprimento posicionado horizontalmente, como mostrado na Figura 8:

Figura 8 – Desenho prototípico do paralelogramo não retângulo e não losango no Brasil



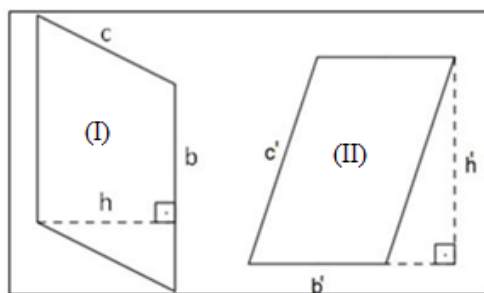
Fonte: Araújo (2018, p. 49)

Ao analisar uma coleção de livros didáticos, Santos (2005) notou uma incidência maior do desenho prototípico do paralelogramo não retângulo e não losango. Assim como essa pesquisadora, não somos contrários à utilização de tarefas que contemplem

desenhos prototípicos, os quais funcionam como "pontos de referência cognitiva" e são, portanto, importantes no processo de conceituação. No entanto, também defendemos que para o sujeito atribuir sentido amplo aos conceitos, é necessário lidar com uma diversidade de representações que incluem desenhos prototípicos, não prototípicos e que mais se aproximam dos prototípicos.

Além da representação anterior, o paralelogramo não retângulo e não losango pode ser representado de outras maneiras. Por exemplo, se mantivesse essa mesma configuração, ou seja, lado de maior comprimento na posição horizontal e altura interna, porém com inclinação para a esquerda, teríamos um desenho que mais se aproxima do prototípico. Além desse, temos aqueles que podem ser caracterizados como desenhos não prototípicos, conforme apresentamos na Figura 9:

Figura 9 – Alguns desenhos não prototípicos de paralelogramos não retângulos e não losangos



Fonte: Araújo (2018, p. 50, adaptado)

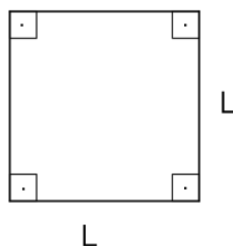
Como percebemos, eles se diferenciam do desenho prototípico, uma vez que, no (I), apesar de a altura traçada ser interna, o lado de maior comprimento, correspondente a essa altura, está na posição vertical; já o (II), embora seja "inclinado para a direita", a altura traçada, relativa ao lado de menor comprimento, é externa e o lado que se encontra posicionado horizontalmente não é o de maior comprimento.

Em relação aos demais paralelogramos (quadrados, retângulos não quadrados e losangos não quadrados), seus desenhos prototípicos correspondem àqueles sinalizados por Menegotto e Lara (2011) e que são confirmados a partir da análise da coleção de livros didáticos apresentada na seção 4 deste artigo. Os desenhos do quadrado e do retângulo não quadrado são comuns aos considerados prototípicos na dissertação de mestrado de Araújo (2018), os quais também integram alguns elementos apontados por Teles (2007) e Pereira da Costa (2016).

No caso do quadrado, seu desenho prototípico é o representado na Figura 10, no qual há um lado na posição horizontal e outro na vertical, considerando a margem inferior da folha como referência. Além disso, são explicitados os comprimentos de dois lados

adjacentes.

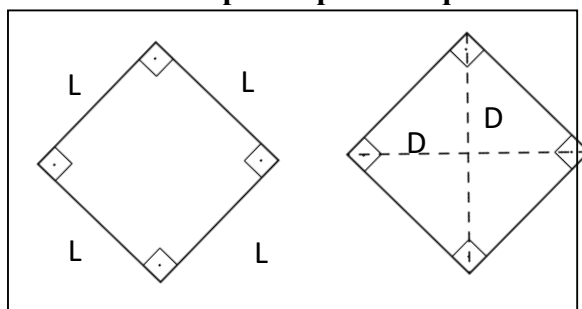
Figura 10 – Desenho prototípico do quadrado



Fonte: Araújo (2018, p. 52)

Quanto aos desenhos não prototípicos, apontamos aqueles que se diferem do anterior, ou seja, não possuem um lado apoiado na horizontal e sim, por exemplo, um vértice, tomando a margem inferior da folha como referência, ou é explicitado o comprimento em todos os lados ou é fornecido apenas o comprimento da diagonal. Vejamos alguns casos ilustrados na Figura 11, porém podem existir outros que não estejam em conformidade com aquele apresentado na Figura 10:

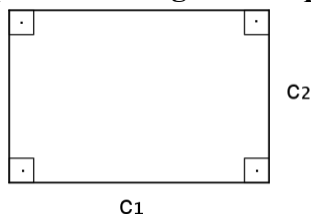
Figura 11 – Alguns desenhos não prototípicos de quadrados



Fonte: Araújo (2018, p. 52)

No caso do retângulo não quadrado, seu desenho prototípico possui o lado de maior comprimento na horizontal e o de menor comprimento na vertical, considerando a borda da folha como referência. Também são fornecidos os comprimentos dos dois lados, como na Figura 12:

Figura 12 – Desenho prototípico do retângulo não quadrado

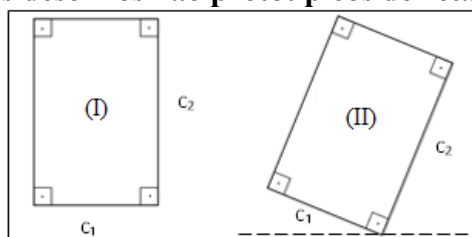


Fonte: Araújo (2018, p. 51)

Os desenhos não prototípicos de retângulos não quadrados possuem o lado de maior comprimento na vertical ou inclinado, apoiado em um dos vértices, considerando a borda da folha como referência. Neles, podem ser explicitados todos os comprimentos ou dois deles, como nos exemplos mostrados na Figura 13, ou o da diagonal e de um

dos lados, entre outras possibilidades que se diferenciam do representado acima.

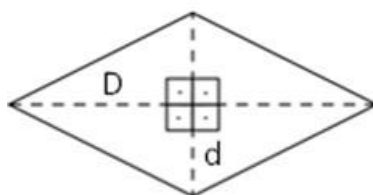
Figura 13 – Alguns desenhos não prototípicos de retângulos não quadrados



Fonte: Araújo (2018, p. 51)

O (I) pode ser considerado como o que mais se aproxima do desenho prototípico, porém diferencia-se por possuir o lado de maior comprimento na posição vertical. Já o (II) possui os lados em posição oblíqua, tomando a linha tracejada como referência. O último paralelogramo a ser discutido, porém igualmente importante, é o losango não quadrado. Seu desenho prototípico é aquele que possui a diagonal de maior comprimento na horizontal e a de menor comprimento na vertical, tomando a margem inferior da folha como referência, ilustrado na Figura 14.

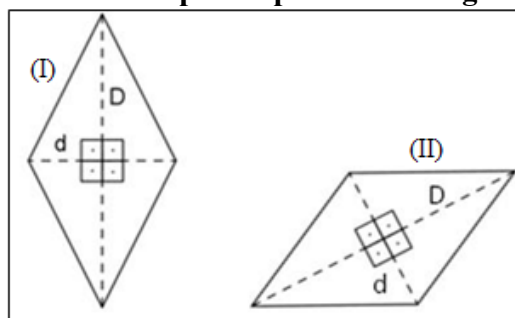
Figura 14 – Desenho prototípico do losango não quadrado



Fonte: Araújo (2018, p. 52, adaptado)

Os desenhos não prototípicos de losangos não quadrados se diferenciam do exposto acima por não possuírem a diagonal de maior comprimento paralela à margem inferior da folha ou por estarem com um dos lados apoiados horizontalmente, tomando a margem inferior da folha como referência, ou por ser fornecido o comprimento do lado ao invés dos comprimentos das diagonais, entre outras características que fogem do padrão destacado anteriormente. Vejamos alguns exemplos na Figura 15:

Figura 15 – Alguns desenhos não prototípicos de losangos não quadrados



Fonte: Araújo (2018, p. 51-52, adaptado)

Assim como dito para o retângulo não quadrado, o (I) pode ser considerado como o que mais se aproxima do desenho prototípico, porém diferencia-se por possuir a diagonal de maior comprimento na posição vertical. O (II) está com um de seus lados apoiado horizontalmente, considerando a margem inferior da folha como referência. Por fim, alertamos que trabalhar apenas com desenhos prototípicos não contribui para o desenvolvimento do repertório de esquemas dos estudantes, tornando-o limitado para lidar com situações que contemplem outros desenhos. Souza (2013) percebeu que os participantes da sua pesquisa, estudantes do 2º ano do Ensino Médio Técnico, tinham melhor desempenho quando estavam lidando com situação envolvendo o desenho prototípico do paralelogramo não retângulo e não losango, considerada por ele como habitual. Para evitar que tenham dificuldades com outros desenhos, destacamos a necessidade de explorar as figuras geométricas planas em diversas representações e não apenas os desenhos prototípicos. Esse aspecto contribui para o reconhecimento dos elementos e propriedades comuns entre elas e, com isso, o sentido atribuído pelo sujeito passa a ser mais amplo.

3 Percurso metodológico

Adotamos preceitos do arcabouço teórico-metodológico da Engenharia Didática (ED) como metodologia de pesquisa, a qual vem sendo utilizada em diversos trabalhos, nos quais o foco de investigação é voltado a relações entre ensino e aprendizagem de objetos matemáticos. De acordo com Artigue (1996), a proposta deve visar um conteúdo matemático preciso, em nosso caso os paralelogramos, o qual faz o pesquisador mergulhar no centro da complexidade do sistema investigado.

Em relação ao seu interesse, Brousseau (2013, p. 4) aponta que:

A engenharia didática preocupa-se com a criação de modelos consistentes e relevantes e a realização de dispositivos pedagógicos para um conhecimento específico, destinados a descrever ou prever, e explicar os acontecimentos observáveis de um dado episódio de ensino [...] (Tradução nossa).

O pesquisador supracitado ressalta ainda que “o estudo da consistência e relevância destes modelos requer um exame crítico de todos os conceitos relacionados com o ensino, a aprendizagem e a própria constituição da matéria ensinada” (*Ibid.*, p. 4, tradução nossa).

Artigue (2020) aponta duas características essenciais da ED clássica: a primeira é que ela “baseia-se em realizações didáticas na sala de aula, ou seja, na concepção, implementação, observação e análise de sequências de ensino” (p. 32, tradução nossa) e a segunda consiste no fato de que:

a sua validação é interna, baseada no confronto entre a análise a priori e a posteriori, e a sua estruturação em quatro fases: a das análises prévias, a da concepção e análise a priori da engenharia, a da experimentação e coleta de dados, e finalmente a da análise a posteriori e validação (*Ibid.*, p. 32, tradução nossa).

Cabe ressaltar que, embora essas fases estejam ordenadas, não significa que não se possa voltar a uma etapa anterior mesmo estando em uma posterior. Essas retomadas dependerão das necessidades que forem surgindo ao longo da execução da pesquisa. Como este artigo é um recorte de uma pesquisa de doutorado, vamos focar apenas nas análises prévias, principalmente em suas vertentes epistemológica e didática. A vertente epistemológica trata-se de um estudo do ponto de vista matemático e histórico voltado aos paralelogramos, como fizemos nas seções anteriores destacando diferentes definições e evoluções ao longo do tempo, bem como propriedades e distintas representações dessas figuras. A vertente didática compreende as características do funcionamento do ensino de paralelogramos, sobre a qual escolhemos discutir como tais representações aparecem em um dos recursos mais utilizados pelos professores em sala de aula, os livros didáticos. Assim, mapeamos a frequência com que desenhos prototípicos, não prototípicos e que mais se aproximam dos prototípicos apareciam na coleção analisada. Os achados são apresentados na seção seguinte.

4 Discussão dos resultados

A coleção de livros didáticos de Matemática para as turmas do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental analisada foi Matemática: compreensão e prática, do autor Ênio Silveira, da editora Moderna, 5ª edição, ano de publicação 2018, aprovada no PNLD 2020, para ser utilizada durante os anos letivos de 2020 a 2023. Sua escolha deve-se ao fato de ser a coleção adotada na escola campo da nossa pesquisa de doutorado (Araújo, 2023). Ela é dividida em quatro volumes, sendo cada um desses composto por quatro unidades formadas por dois ou mais capítulos. Uma sugestão dada pelo autor é que cada unidade seja trabalhada durante um bimestre. Silveira (2018) faz a abertura dos capítulos a partir das seções “É hora de observar e refletir” e “Trocando ideias”, as quais buscam, respectivamente, promover a observação e reflexão por meio de uma atividade introdutória relativa ao conteúdo do capítulo, e o diálogo entre os estudantes para mobilização de conhecimentos. Após esse momento, o autor apresenta o conteúdo matemático por meio de definições, propriedades, exemplos e atividades. Ao longo dos capítulos aponta sugestões de leituras e aspectos históricos dos assuntos

envolvidos. Os capítulos são encerrados com a seção “Trabalhando com conhecimentos adquiridos”, a qual tem o objetivo de retomar os principais pontos tratados e aprofundá-los com questões de diferentes níveis.

Analizamos com que frequência os diferentes desenhos de cada um dos paralelogramos (quadrados, retângulos não quadrados, losangos não quadrados e paralelogramos não retângulos e não losangos) apareciam em cada um dos exemplares da coleção. Iniciamos pelo paralelogramo não retângulo e não losango, cujos dados são apresentados na seguinte tabela:

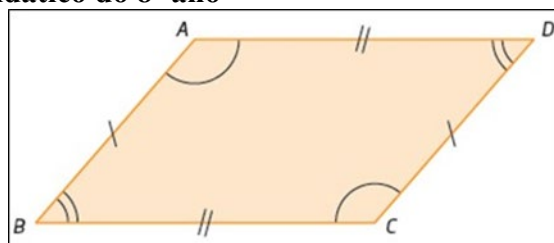
Tabela⁷ 1 – Frequência dos desenhos de paralelogramos não retângulos e não losangos na coleção analisada

Percentual dos desenhos de paralelogramos não retângulos e não losangos			
Livros	Prototípico	Não prototípico	Mais se aproxima do prototípico
6º ano	54,5%	45,4%	-
7º ano	63,7%	36,3%	-
8º ano	53%	47%	-
9º ano	90%	10%	-

Fonte: dados da pesquisa

De acordo com os dados acima e confirmando os achados da pesquisa de Santos (2005), em todos os exemplares prevaleceu o desenho prototípico do paralelogramo não retângulo e não losango, cuja representação é mostrada na Figura 16:

Figura 16 – Desenho prototípico do paralelogramo não retângulo e não losango extraído do livro didático do 8º ano



Fonte: Silveira (2018c, p. 143)

Como podemos observar, o desenho da Figura 16 corresponde ao apresentado por Santos (2005), no qual o lado de maior comprimento está na posição horizontal e a inclinação é para a direita. Nesta figura não há altura traçada internamente nem externamente.

Quanto aos desenhos dos quadrados, assim como no caso dos paralelogramos não retângulos e não losangos, houve maior incidência do desenho prototípico em todos os exemplares da coleção analisada, como mostrado na Tabela 2:

⁷ Nesta tabela e na demais, o tracinho significa que não foram verificados desenhos que se enquadrassem naquela categoria. Além disso, uns percentuais podem totalizar 100% e outros 99,9%, devido aos resultados encontrados e por não termos realizado arredondamentos.

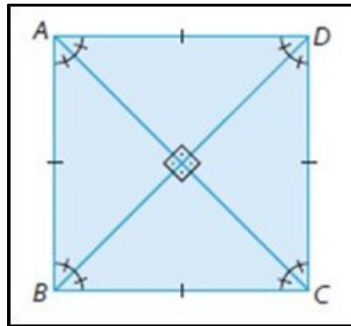
Tabela 2 – Frequência dos desenhos de quadrados na coleção analisada

Percentual dos desenhos de quadrados			
Livros	Prototípico	Não prototípico	Mais se aproxima do prototípico
6º ano	92,4%	7,5%	-
7º ano	82,6%	17,3%	-
8º ano	81%	19%	-
9º ano	88,2%	11,7%	-

Fonte: dados da pesquisa

Observamos na Tabela 2 que em todos os livros didáticos analisados, os percentuais de desenhos prototípicos de quadrados superaram 80%. Vejamos na Figura 17 o desenho priorizado:

Figura 17 – Desenho prototípico do quadrado extraído do livro didático do 8º ano



Fonte: Silveira (2018c, p. 145)

O desenho representado na Figura 17 está de acordo com aquela apresentada por Araújo (2018), em que um dos lados está na posição horizontal, considerando a margem inferior da folha como referência.

Em relação aos desenhos dos retângulos não quadrados, apresentamos os percentuais na Tabela 3:

Tabela 3 – Frequência dos desenhos de retângulos não quadrados na coleção analisada

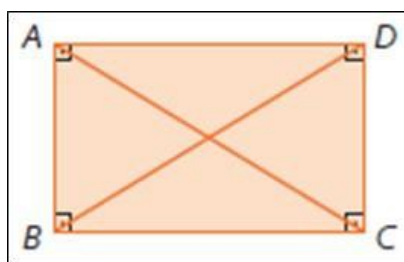
Percentual dos desenhos de retângulos não quadrados			
Livros	Prototípico	Não prototípico	Mais se aproxima do prototípico
6º ano	80,3%	3,9%	15,7%
7º ano	65,7%	2,8%	31,4%
8º ano	70%	10%	20%
9º ano	58,7%	2,7%	38,5%

Fonte: dados da pesquisa

Embora tenhamos um percentual maior de desenhos que mais se aproximam dos prototípicos do que não prototípicos, os prototípicos ainda prevaleceram para os retângulos não quadrados, sendo a incidência maior no livro didático do 6º ano que, assim como no caso dos quadrados, supera 80%. Cabe ressaltar que nesse exemplar, os quadrados e retângulos não quadrados foram as figuras mais representadas,

provavelmente pelo fato de o autor seguir as orientações curriculares vigentes, totalizando juntas 104 representações, enquanto que o losango não quadrado e o paralelogramo não retângulo e não losango totalizaram 14 representações. Tais dados apontam para uma predominância de quadrados e retângulos não quadrados e por seus desenhos prototípicos, conforme apresentado na Figura 18:

Figura 18 – Desenho prototípico do retângulo não quadrado extraído do livro didático do 8º ano



Fonte: Silveira (2018c, p. 145)

O retângulo não quadrado representado na Figura 18 possui o lado de maior comprimento na posição horizontal, considerando a margem inferior da folha como referência, e está em consonância com aquele apresentado por Menegotto e Lara (2011) e Araújo (2018). Passemos à análise do último paralelogramo, porém não menos importante, o losango não quadrado, cujos percentuais são mostrados na Tabela 4:

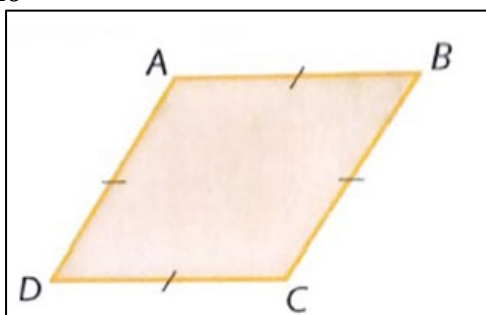
Tabela 4 – Frequência dos desenhos de losangos não quadrados na coleção analisada

Percentual dos desenhos de losangos não quadrados			
Livros	Prototípico	Não prototípico	Mais se aproxima do prototípico
6º ano	-	66,6%	33,3%
7º ano	25%	25%	50%
8º ano	45,4%	36,4%	18,1%
9º ano	66,6%	-	33,3%

Fonte: dados da pesquisa

Nos demais paralelogramos observamos predominância dos desenhos prototípicos em todos os exemplares da coleção analisada. Porém, no caso dos losangos não quadrados, no âmbito dessa coleção, as características de seu desenho prototípico são menos nítidas, considerando a distribuição dos percentuais da Tabela 4. Mesmo assim, é possível notar que nos livros didáticos para os 8º e 9º anos houve maior incidência do desenho prototípico; já nos LD para os 6º e 7º anos, respectivamente, os maiores índices são do desenho não prototípico e do que mais se aproxima do prototípico. Vejamos um recorte na Figura 19:

Figura 19 – Desenho não prototípico do losango não quadrado extraído do livro didático do 6º ano

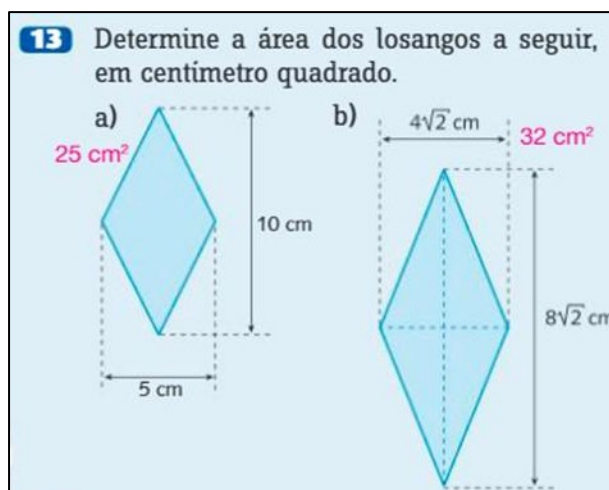


Fonte: Silveira (2018a, p. 223)

Na representação mostrada na Figura 19, o losango não quadrado está apoiado sobre um dos lados horizontalmente, tomando a margem inferior da folha como referência, configurando como um desenho não prototípico, conforme apontado por Araújo (2018).

Já no livro didático do 7º ano, o desenho do losango não quadrado prevalecente foi o que mais se aproxima do prototípico (50%), o qual possui a diagonal de maior comprimento na posição vertical, apresentado na Figura 20:

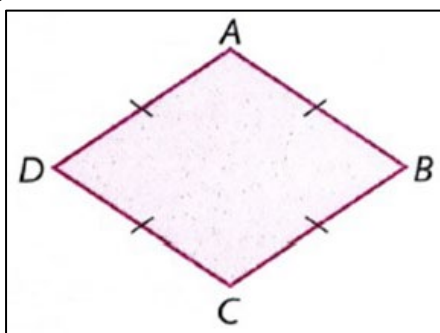
Figura 20 – Desenhos de losangos não quadrados que mais se aproximam do prototípico extraído do livro didático do 7º ano



Fonte: Silveira (2018b, p. 240)

Diferentemente dos dois casos anteriores, nos livros didáticos dos 8º e 9º anos prevaleceu o desenho prototípico do losango não quadrado, ou seja, o que possui a diagonal de maior comprimento na posição horizontal, paralela à margem inferior da folha, se a tomarmos como referência. A Figura 21 o exemplifica:

Figura 21 – Desenho prototípico do losango não quadrado extraído do livro didático do 9º ano



Fonte: Silveira (2018d, p. 242)

Por fim, podemos observar que o desenho predominante do losango não quadrado não foi unânime ao longo dos livros didáticos analisados como ocorreu com os demais paralelogramos (quadrado, retângulo não quadrado e paralelogramo não retângulo e não losango). No entanto, considerando toda a coleção, o de maior incidência foi o prototípico, o qual possui a diagonal de maior comprimento na posição horizontal, prevalecendo nos LD dos 8º e 9º anos, seguido do que mais se aproxima do prototípico, ou seja, tem essa diagonal em posição vertical, que teve maior incidência no LD do 7º ano. O terceiro mais utilizado foi o que tem um dos lados apoiado na horizontal, priorizado no LD do 6º ano. Essa diversidade de representações para uma mesma figura ao longo dos exemplares da coleção é considerada um ponto positivo para o seu reconhecimento pelos estudantes.

Considerações Finais

Neste artigo, recorte da pesquisa de doutorado de Araújo (2023), nosso objetivo foi apresentar uma caracterização para os desenhos de paralelogramos e uma análise dos desenhos priorizados em uma coleção de livros didáticos para os anos finais do Ensino Fundamental.

Quanto à caracterização dos desenhos, apontamos avanços em relação aos estudos já existentes tanto no que se refere a contemplar todos os paralelogramos quanto na apresentação de uma classificação intermediária, ou seja, entre os prototípicos e não prototípicos existem aqueles que mais se aproximam dos prototípicos, nos quais as dificuldades dos estudantes são menores se comparados com os não prototípicos.

No que se refere à análise da coleção de livros didáticos, observamos que há maior incidência de desenhos prototípicos, não apenas do paralelogramo não retângulo e não losango, como observado por Santos (2005), mas também do quadrado e do retângulo não quadrado, e, menos nitidamente, do losango não quadrado, como vimos na seção 4.

Por fim, destacamos a importância da utilização de uma diversidade de representações no contexto escolar para o processo de conceituação e atribuição de sentido aos paralelogramos, como ocorreu no caso do losango não quadrado.

Referências

ARAÚJO, J. C. **Como os alunos de 8º ano lidam com situações relativas à área de paralelogramos?: um estudo sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais.** 2019. 170 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.

ARAÚJO, J. C. **Imbricações entre os campos conceituais da Geometria e das Grandezas e Medidas no ensino e na aprendizagem da área de paralelogramos.** 2023. 464f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2023.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. **Didáticas das Matemáticas.** Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Cap. 4. p. 193-217.

ARTIGUE, M. Méthodologies de recherche en didactique des mathématiques: Où en sommes-nous? **Educação Matemática Pesquisa**, v. 22, n. 3, p. 25-64, 2020.

BARBOSA, J. L. M. Geometria Euclidiana Plana. **Coleção do Professor de Matemática** – Sociedade Brasileira de Matemática, 10ª edição, 2006.

BONGIOVANNI, V. **As diferentes definições dos quadriláteros notáveis.** Matemática. Assunto: Geometria - Projeto Apoema. Editora do Brasil. Texto cedido pela Sociedade Brasileira de Matemática, publicado originalmente na Revista do Professor de Matemática (<http://www.rpm.org.br>). São Paulo: IME-USP, n. 55, p. 29-32, 2004.

BROUSSEAU, G. **Introduction à l'ingénierie didactiques.** 2013. Disponível em: <<http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2013/12/Introduction-%C3%A0-ling%C3%A9nierie-didactique3.pdf>>. Acesso em: 15 jun. 2021.

LABORDE, C.; CAPPONI, B. Aprender a ver e a manipular o objeto geométrico além do traçado no Cabri-Géomètre. **Em Aberto: Tendências em Educação Matemática**, Brasília, v. 14, n. 62, p. 51-62, abr./jun. 1994.

LIMA, P. F.; CARVALHO, J.B.P.F. Geometria. In: CARVALHO, J. B. P. F. **Coleção Explorando o Ensino: Matemática**, v. 17. Brasília, MEC, 2010, p. 135 – 166.

MACHADO, P. F. **Fundamentos de Geometria Plana.** CAED/UFMG, Belo Horizonte-MG, 2012.

MENEGOTTO, G.; LARA, I. C. M. Contribuições do software GeoGebra para o

estudo de paralelogramos. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.4, n.2, p. 31-55, 2011.

MOURA, L. K. J. **Abordagem alternativa no estudo dos quadriláteros**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM. UFMT – Cuiabá-MT, 2013.

PEREIRA DA COSTA, A. **A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º ano do ensino fundamental**: um estudo sob a luz da teoria vanhieliana. 2016. 242f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

PEREIRA DA COSTA, A. **A construção de um modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico**: o caso dos quadriláteros notáveis. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2019.

SANTOS, M. R. **Resolução de problemas envolvendo área de paralelogramo**: um estudo sob a ótica das variáveis didáticas e do contrato didático. 2005. 178 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) – UFRPE, Recife-PE, 2005.

SILVEIRA, E. **Matemática: compreensão e prática**. Matemática – 6º ano, 5ª edição, São Paulo: Moderna, 2018a.

SILVEIRA, E. **Matemática: compreensão e prática**. Matemática – 7º ano, 5ª edição, São Paulo: Moderna, 2018b.

SILVEIRA, E. **Matemática: compreensão e prática**. Matemática – 8º ano, 5ª edição, São Paulo: Moderna, 2018c.

SILVEIRA, E. **Matemática: compreensão e prática**. Matemática – 9º ano, 5ª edição, São Paulo: Moderna, 2018d.

SOUZA, E. R. **Análise de estratégias de alunos do ensino médio em problemas de cálculo de área do paralelogramo**. 2017. 108 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – UFPE, Recife-PE, 2013.

TELES, R. A. M. **Imbricações entre campos conceituais na matemática escolar**: um estudo sobre as fórmulas de área de figuras geométricas planas. Tese (Doutorado em Educação) – UFPE, Recife-PE, 2007.