http://doi.org/10.23925/2238-8044.2025v14i1.70564

Semelhança de triângulos em um livro de Geometria Euclidiana para licenciaturas na Bahia: um estudo semiótico

ELIZANGELA BRITO XAVIER DA CONCEIÇÃO[1]

ANDRÉ PEREIRA DA COSTA[2]

Resumo

Este artigo, recorte de uma pesquisa de mestrado, tem como objetivo analisar a abordagem sobre semelhança de triângulos em um livro de Geometria Plana mais citado nos Projetos Pedagógicos de Curso (PPC) das licenciaturas em Matemática das Instituições de Ensino Superior (IES) públicas da Bahia.Trata-se de um estudo de caso com abordagem qualitativa, em que se adotou a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Duval, como aporte teórico. O recorte aqui discutido versa sobre a análise do livro Geometria Euclidiana Plana de João Lucas Marques Barbosa. Em relação aos resultados, notou-se que o livro analisado, em seus contextos teóricos do conteúdo, apresenta os registros discursivo, simbólico e figural, tendo como registro de partida mais comum, a língua natural (registro discursivo), e registro de chegada o uso do registro simbólico.

Palavras-chave: *livro; licenciatura; semiótica; semelhança de triângulos.*

Abstract

This article, an excerpt from a master's research project, aimed to analyze the approach to similarity of triangles in a Plane Geometry book most cited in the Pedagogical Course Projects (PPC) of undergraduate programs in Mathematics at public Higher Education Institutions (IES) in Bahia. This was a case study with a qualitative approach, in which Duval's Theory of Semiotic Representation Registers was adopted as a theoretical framework. The excerpt discussed here deals with the analysis of the book Geometria Euclidiana Plana by João Lucas Marques Barbosa. Regarding the results, it was noted that the book analyzed, in its theoretical contexts of content, presents the discursive, symbolic and figural registers, having as the starting register the natural language (discursive register), and as the end register the use of the symbolic register.

Keywords: *book; initial training of mathematics teachers; semiotics; similarity of triangles.*

Introdução

No Brasil, o ensino da Geometria vem crescendo significativamente nos últimos anos, ganhando mais espaço nas pesquisas, nas salas de aulas da Educação Básica e nos

[1] Escola de Educação Básica Professor Mansueto Boff – e-mail: elizangela.xavierc@gmail.com

[2] Universidade Federal de Campina Grande – e-mail: andre.pcosta@outlook.com

currículos, pois seu ensino tem contribuído para a formação do estudante como cidadão (Rezende, 2017). Para Silva e Rosa dos Santos (2021, p. 21), o estudo da Geometria é necessário para o desenvolvimento do pensamento geométrico, pois contribui para que o estudante compreenda problemas, desenvolva o raciocínio e possa estudar outras áreas do conhecimento que utilizam elementos geométricos.

No entanto, Moura, Krindges e Wielewski (2020) sinalizam que, embora existam mudanças e avanços na educação brasileira quanto ao ensino da Geometria, e um reconhecimento crescente sobre a importância de seu estudo, a situação é preocupante. Muitos professores não receberam formação adequada para trabalhar com esse campo do estudo da Matemática e, por isso, não se sentem seguros para ensiná-lo, o que leva, em muitos casos, à omissão do ensino da Geometria. Assim, indica que, apesar dos avanços e da valorização do ensino geométrico, persistem desafios significativos relacionados à formação docente e à efetiva inserção da Geometria no cotidiano escolar.

Nos cursos de licenciatura em Matemática, em geral, os estudantes, que são os futuros professores da educação básica, têm vivenciado experiências com a Geometria de maneira desarticulada das suas futuras práticas pedagógicas (Pereira da Costa, 2020). De modo que, ao estarem na sala de aula como professores, não conseguem ensinar os conteúdos de Geometria, ou acabam por abordá-los de forma superficial ou algebrizada.

Fonseca e Leivas (2018), apontam que existem problemas no ensino de Geometria no ensino básico e no ensino Superior. Tal fato tem provocado dificuldades de aprendizagem no conceito de triângulos no ensino fundamental (Rodrigues; Carrião, 2015; Pereira Silva, 2018; Silva; Nasser, 2021), no ensino médio (Nascimento, 2017) e no ensino superior (Oliveira; Chiummo, 2015; Leivas, 2017).

Ao discutir sobre Geometria, Ferreira e Almouloud (2017) analisaram em sua pesquisa livros usados para ensinar Geometria no Ensino Superior. Os autores sinalizam que é possível encontrar livros que não apresentam exercícios com situações que tem possibilitado ao estudante a fazer descobertas e levantamento de conjecturas. Acrescentam que, existem manuais onde as validações de algumas propriedades geométricas são empíricas. Além disso, ressaltam que os livros adotados nos componentes de Geometria constituem um referencial para estudo, também podem ser utilizados como base para o planejamento didático-pedagógico. (Ferner; Soares; Mariani, 2020, p.69).

Desse modo, considerando a importância do livro utilizado no Ensino Superior, esta pesquisa teve como foco o estudo da abordagem dos exercícios/problemas sobre triângulos, em um livro de Geometria Plana mais citado nos Projetos Pedagógicos de Curso (PPC) das licenciaturas em Matemática das Instituições de Ensino Superior (IES) públicas da Bahia, a partir da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS). Então, para esta pesquisa temos como problema: Qual é a abordagem do estudo de semelhança de triângulo no livro de Geometria plana mais citado em Projetos Pedagógicos de Cursos nas Instituições Públicas de Ensino Superior da Bahia?

A partir dessa problemática buscou-se dialogar com a TRSS, e analisar a abordagem de semelhança de triângulo no livro mais citado no PPC dos mencionados cursos de licenciatura da Bahia.

1 Teoria dos Registros de Representação Semiótica

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), proposta por Raymond Duval, investiga, a partir de uma abordagem semiótica, o funcionamento cognitivo que possibilita compreender os processos de aprendizagem em Matemática (Duval, 2003; 2018).

Segundo o autor, muitos estudantes da Educação Básica apresentam dificuldades de compreensão em Matemática. A TRRS oferece subsídios para analisar a forma de pensar e de operar cognitivamente nesse campo, uma vez que dá possibilidades de análise sobre a maneira de pensar e de operar cognitivamente, e de trabalhar em Matemática, tendo em vista que essa área do conhecimento possui uma linguagem específica para produção de sentidos aos conceitos da Matemática, como no domínio da Álgebra ou da Geometria, por exemplo (Duval, 2003).

Dessa maneira, compreender Matemática requer a mobilização de diferentes registros de representação — como o algébrico, o geométrico e o discursivo — e a capacidade de converter entre eles, mantendo o mesmo significado. Essa coordenação é fundamental para a construção dos conceitos e para o desenvolvimento do pensamento matemático (Duval, 2018).

Para Duval (2003; 2018), o acesso aos objetos matemáticos acontece diferente das outras áreas do conhecimento. Enquanto em áreas distintas da matemática, é comum que o acesso ocorra por um meio não semiótico, ou seja, por meio de instrumentos – telescópios, microscópios, osciloscópio, etc – podendo ver, tocar, manipular, possibilitando diferenciar o objeto da sua representação, já na matemática ocorre exclusivamente a partir de diferentes representações semióticas que são produzidas por meio das representações mentais.

De acordo com Duval (2009, 2012a), as representações mentais são identificadas como imagens mentais de conceitos, que uma pessoa possa ter de um objeto, na ausência do significante perceptível de uma situação que lhe é associada. Segundo Fernandes Silva (2018, p. 31), o significante é a representação dos objetos que produzem a ideia do objeto que representam, "e a ideia do objeto representado, que seria o significado do objeto, construído pelo sujeito a partir das representações mentais da idéia de significante".

Duval (2003) organiza as representações semióticas em quatro principais grupos de registros, como ilustrado no Quadro 1:

Quadro 1 - Tipos de registros de representação semiótica

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: • argumentação a partir de observações, de crenças...; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). • apreensão operatória e não somente perceptiva; • construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: • numéricas (binária, decimal, fracionária...); • algébricas; • simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos. • mudanças de sistema de coordenadas; • interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval (2003, p.14)

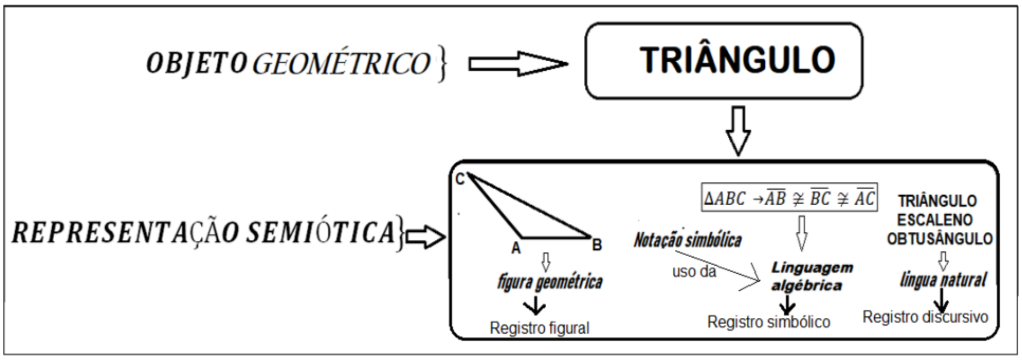
Como podemos perceber pelo quadro acima, os quatros registros de representações semióticas dividem-se em dois grandes registros. Os registros multifuncionais, que são os tratamentos não algoritmizáveis, incluem a língua natural, voltada principalmente para as ações discursivas verbais entre conceitos, como as argumentações e as deduções válidas, realizadas por meio de crenças, observações, deduções ou teoremas. Ainda nesse grupo, encontram-se as representações não discursivas, observáveis nas figuras geométricas planas ou em perspectiva. Por fim, os registros monofuncionais correspondem aos sistemas de escritas, como os algoritmos, as escritas de números, os cálculos e as representações não discursivas, como os gráficos cartesianos. (Duval, 2003).

Nesse sentido, Duval (2012a, 2018), assinala que os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis da forma que acontece com os objetos concretos ditos "reais", ou até acessível à percepção ou à experiência intuitiva imediata, é preciso, portanto, dar representantes a partir da representação semiótica.

Segundo o autor, o desenvolvimento dessas representações semióticas contribuiu para a compreensão da matemática e para a evolução do pensamento matemático. Entretanto, não se pode confundir o objeto matemático com sua representação, por isso é necessário ter acesso de, pelo menos, dois registros de representações diferentes e fazer a articulação entre dois ou mais registros de representação semiótica e, com isso, nos aproximarmos da compreensão do objeto matemático.

Consideremos um mesmo objeto que pode ser representado por uma variedade de representações semióticas diferentes, como as escrituras de um número decimal ou fracionário, escrita algébrica, símbolos, gráficos, figuras e língua natural. (Duval, 2009). A Figura 1 sintetiza e exemplifica.

Figura 1 - Objeto Geométrico e Representação Semiótica



Fonte: Autoria Própria

Como se observa na Figura 1, o objeto geométrico, “triângulo”, é apresentado por meio de três registros de representação semiótica — o figural, o simbólico e o discursivo —, conforme a organização proposta por Duval (2003) no Quadro 1. Essa articulação evidencia que um mesmo objeto matemático pode ser representado de diferentes maneiras, e que a compreensão plena desse objeto depende da coordenação entre os registros.

Conforme Duval (2018) para que o objeto matemático não seja confundido com a sua representação, é necessário coordenar ao menos dois dos seus registros. Além disso, para distinguir o objeto matemático da sua representação é necessário considerar o conteúdo da representação, que depende, inteiramente, do sistema semiótico utilizado para produzir a representação. Nesse viés, o autor aponta que, o conteúdo explícita ou apresenta algumas propriedades do objeto, mas oculta outras, dependendo do sistema semiótico utilizado que produz a representação.

Na Figura 1, o registro figural revela a forma visual do triângulo, permitindo ao observador identificar seus vértices e lados a partir da apreensão perceptiva. Contudo, ele oculta as medidas de comprimentos dos lados e da abertura dos ângulos, bem como os raciocínios dedutivos subjacentes, uma vez que a figura, isoladamente, não evidencia proporcionalidades nem medidas exatas — essa informação só se torna evidente no registro discursivo, em que se nomeia o triângulo como escaleno obtusângulo. O registro simbólico (ou algébrico), explicita que os lados possuem medidas diferentes, revelando relações quantitativas, mas oculta tanto as informações sobre os ângulos quanto a percepção espacial do objeto. Já o registro discursivo, expresso na língua natural, revela que o triângulo possui um ângulo maior que 90°, sugerindo que os ângulos internos são diferentes, a partir do nome dado; contudo, oculta a dimensão visual e métrica que permite observar tais diferenças.

Para Duval (2009, p.14), a distinção e o reconhecimento da representação semiótica do objeto matemático são de suma importância na aprendizagem da matemática, caso contrário, "toda a confusão entre o objeto e sua representação provoca, com o decorrer do tempo, uma perda de compreensão".

Além disso, Duval (2009), ressalta que existem dois tipos de transformações cognitivas ligadas à semiose, fundamentais para compreender o funcionamento cognitivo na aprendizagem matemática: o tratamento e a conversão. O tratamento consiste na transformação que ocorre no interior de um mesmo registro de representação, seguindo regras próprias de funcionamento. Já a conversão corresponde à passagem de um registro para outro, como da língua natural para o gráfico, da língua natural para o figural ou algébrico, ou ainda do algébrico para a língua natural, exigindo do sujeito a coordenação entre diferentes registros, realizando a mudança de registro para o outro, para preservar o significado do objeto representado.

Nesse sentido, a coordenação entre os registros de representação, especialmente por meio da conversão, é fundamental para a compreensão da Matemática, uma vez que, conforme destaca Duval (2018, p. 16), "quando se muda de registro de representação, essa mudança deve ser efetuada nos dois sentidos de conversão, e não em um só sentido". Para Duval (2003), o objeto matemático é melhor compreendido quando o indivíduo consegue efetuar nos dois sentidos da conversão, que seria a ida e a volta, mas geralmente é privilegiado um sentido, o da conversão.

Nesta perspectiva, Duval (2009; 2012a), aponta que, muitos estudantes nos diferentes níveis de ensino, apresentam dificuldades na aprendizagem da matemática quando se trata da atividade da conversão, pois realizam essa operação com dificuldade, considerando que é menos imediata a mudança da forma de uma representação. Assim sendo, a coordenação entre as representações não é algo evidente ou espontâneo, podendo ocorrer, por parte do estudante, o não reconhecimento do mesmo objeto nas suas variações de representações dadas em sistemas semióticos diferentes.

2 Percurso Metodológico

Assumimos uma abordagem de pesquisa qualitativa, por envolver questões peculiares que buscam compreender fenômenos que não podem ser traduzidos em números, mas que permitem focalizar os processos e os significados relacionados ao campo de estudo (Kauark; Manhães; Medeiros; 2010). Além disso, esta pesquisa se caracteriza como um estudo de caso, pois o foco é a análise do livro mais citado nos Projetos Pedagógicos de Curso (PPC) das licenciaturas em Matemática de instituições públicas (IES) de ensino superior do Estado da Bahia.

É importante ressaltar que esse material — o livro de Geometria Plana — é indicado nos PPC como sugestão de uso didático, configurando-se, portanto, como um material de apoio.Nessa perspectiva, a obra adquire relevância no direcionamento curricular de alguns cursos, o que justifica sua análise enquanto recurso auxiliar ao ensino. Caso a investigação abrangesse outro Estado ou região, é possível que a obra mais referenciada fosse distinta.Caso a opção tivesse recaído sobre outro Estado ou região, é provável que o livro de maior destaque fosse diferente.

Conforme Yin (2001), o estudo de caso possibilita ao pesquisador realizar uma análise descritiva de registros e documentos — no caso desta pesquisa, o livro de Geometria Euclidiana Plana mais mencionado nas referências dos PPC das Licenciaturas em Matemática —, observando os avanços entre a primeira e a última edição da obra.

Foram examinados os PPC disponíveis nos sites das Universidades Públicas da Bahia e de um Instituto Federal, que ofertavam o curso de licenciatura em Matemática na época, analisando os principais livros mencionados de Geometria Euclidiana Plana que são referência para essa componente curricular. Cabe esclarecer que a análise considerou uma amostra representativa, uma vez que tanto as universidades quanto o Instituto Federal possuem diversos campi e polos distribuídos pelo Estado. Assim, foi analisado o PPC de apenas uma cidade de cada instituição, totalizando seis universidades e um instituto federal, dentre todas as instituições públicas de ensino superior existentes na Bahia. Essa amostra possibilitou identificar tendências e recorrências nas escolhas bibliográficas, sem pretensão de esgotar o universo de cursos existentes.

A contagem das três primeiras bibliografias básicas mostrou que o livro de João Lucas Barbosa está citado em todas, com exceção de uma universidade que está na bibliografia complementar. No entanto, em mais da metade está como a primeira referência e o segundo mais citado está o de Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo, com o livro da Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. Os PPC com as bibliografias básicas encontram-se arroladas no quadro abaixo.

Quadro 2 - Relação das bibliografias por Universidade dos livros citado nos PPC na disciplina de Geometria Plana

IES	DISCIPLINA/CIDADE	REFERÊNCIA BÁSICA
Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC)	· Geometria Euclidiana Plana · Ilhéus Noturno Lic. em Matemática	*DOLCE, O; POMPEO, J.N. *Fundamentos de Matemática Elementar*. v. 9. São Paulo: Atual, 1993. *BARBOSA, J. L. B.. *Geometria Euclidiana Plana*. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1994. *NIVEN, I.. *Números Racionais e Irracionais*. Revista do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS)	Geometria Euclidiana Plana · Feira de Santana Diurno Lic. em Matemática	*BARBOSA,J. L. B.. *Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2002. *CARMO, M. P.; MORGADO, A. C; WAGNER, E. *Trigonometria e Números Complexos*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2001. *DOLCE, O; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana*. v. 9. São Paulo: Atual, 1993.
Instituto Federal da Bahia (IFBA)	· Tópicos de Geometria Elementar · Barreiras Diurno Lic. em Matemática	*BARBOSA,J. L. B.. *Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1995. *DOLCE, O; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar*. v. 9, 7. ed. São Paulo: Atual, 1993. *QUEIROZ, M. L. B; REZENDE, E. Q. F. *Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas*. Campinas: Editora da Unicamp, 2005.
Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB)	Geometria Euclidiana Plana ·Barreiras Diurno Lic. em Matemática	*BARBOSA, J. L. B. *Geometria Euclidiana Plana*. 10. ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. *MUNIZ NETO, A. C. *Tópicos de Matemática Elementar: Volume 2 – Geometria Euclidiana Plana*. 2. ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. *MUNIZ NETO, A. C. *Geometria*. 1. ed. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. *DOLCE, O; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana*. v. 9, 7. ed. São Paulo: Atual, 1993.
Universidade do Estado da Bahia (UNEB)	· Geometria Euclidiana Plana · Senhor do Bonfim Matutino e noturno Lic. em Matemática	*LINDQUIST, M. M; SHULTE, A.P. *Aprendendo e Ensinando Geometria*. São Paulo: Atual, 1994. *REZENDE, E. Q. F; QUEIROZ, M. L. B. *Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas*. Campinas: Editora da Unicamp; São Paulo: Imprensa Oficial do Estado de São Paulo, 2000. 260 p. *BARBOSA,J. L. B. *Geometria Euclidiana Plana*. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2002. *DOLCE, O; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana*. v. 9, 6. ed. São Paulo: Atual, 1999.
Universidade Federal Do Recôncavo Da Bahia (UFRB)	· Geometria Plana · Amargosa Diurno. Semi-Presencial-PARFOR	*BARBOSA, J. L. B. *Geometria Euclidiana Plana*. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. *IEZZI, Gelson. *Fundamentos de Matemática Elementar*. v. 9. São Paulo: Atual. *MOISE, E. E. *Geometria Moderna*. v. 1 e 2. São Paulo: Editora Edgar Blücher, 1975.
Universidade Estadual Do	· Geometria Euclidiana Plana	*CARVALHO, P. C. P.. *Introdução à Geometria*. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade

Sudoeste Da Bahia (UESB)	· Vitória da Conquista- Vespertino Lic. em Matemática	Brasileira de Matemática, 1993. *BARBOSA, J. L. B. *Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1995. *CASTRUCCI, B.. *Lições de Geometria Plana*. São Paulo: Editora Distribuidora, 1976.

Fonte: Dados da pesquisa

Desse modo, optamos como o foco de análise dessa pesquisa o livro Geometria Euclidiana Plana de João Lucas Barbosa por ser o mais citado. Cabe destacar que, no PPC da UFBA (Universidade Federal da Bahia) não tem a bibliografia junto à ementa e na UFSB (Universidade Federal Do Sul Da Bahia) a licenciatura, é um interdisciplinar em Matemática e Computação e Suas Tecnologias, não possuindo a disciplina de Geometria Euclidiana Plana, de forma exclusiva.

Na seção a seguir, foi realizada uma análise no livro de Geometria Plana, de João Lucas Marques Barbosa, uma análise dos conceitos, exercícios e problemas baseado na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval, sobre Semelhança de triângulos. Observou-se que os conceitos, exercícios e problemas favorecem a aprendizagem da Geometria a partir da perspectiva teórica enunciada na TRRS. Esta teoria permite compreender o modo como se constrói a aprendizagem da Geometria, entendida não como simples domínio de figuras ou fórmulas, mas como um processo mais amplo e complexo, pois, segundo Duval (2012b, p. 118), "*ver uma figura em geometria é uma atividade cognitiva mais complexa do que o simples reconhecimento daquilo que uma imagem mostra*".

Realizamos a leitura de duas edições, sendo a primeira de 1995 e, a mais recente de 2012 do livro de Geometria Plana de João Lucas Barbosa, sendo estas de diferentes edições, buscando observar aproximações, distanciamentos e avanços, nas edições analisadas, em relação ao estudo dos triângulos nos conceitos, resoluções de problemas e exercícios tratados nos livros. Sendo assim, discutiremos esses aspectos entre as duas obras e verificaremos a abordagem da TRRS tratadas.

3 Análise e discussão dos dados

O livro Geometria Plana, de Barbosa, tem onze edições, sendo a última publicada em 2011, até o momento desta pesquisa, tendo como base o currículo Lattes do autor, atualizado em 31 de janeiro de 2016. Segundo Barbosa (2006), a primeira edição desse livro foi publicada em 1985, e somente a partir da sexta edição, lançada em 2003, o livro passou por modificações. As principais alterações foram realizadas nas atividades, sendo o texto praticamente o mesmo que o das edições anteriores.

O primeiro livro analisado chamaremos de Livro A, editado em 1995, sendo este a reimpressão e segunda edição. O material contém 142 páginas, sendo constituído pela introdução e por 10 capítulos, tendo como título e estudo dos objetos Geométricos: os axiomas de incidência e ordem, axiomas sobre medição de segmentos, axiomas sobre medição de ângulos, congruência, o teorema do ângulo externo e suas consequências, o axioma das paralelas, semelhança de triângulos, o círculo, funções trigonométricas e área. E, ao final de cada capítulo são apresentadas propostas de exercícios, problemas e seções com textos intitulados 'Comentários'.

O segundo livro analisado chamaremos de Livro B, cuja última edição foi reimpressa em 2012, com 280 páginas, correspondendo à 5ª reimpressão. O livro é composto por 11 capítulos, apresentando os mesmos conteúdos e estrutura textual ao longo dos capítulos, de forma equivalente ao Livro A, com exceção do último, que trata do tema Revisão e Aprofundamento, além dos exercícios e problemas acrescentados nesta edição. Essa divisão das questões em exercícios e problemas é explicitada no Prefácio, no qual "foi feita, em princípio, considerando-se que problemas complementam a teoria tem um caráter mais conceitual, enquanto que exercícios destinam-se mais à fixação do conteúdo apresentado" (Barbosa, 2012, p. I).

Dessa maneira, encontramos nos dois livros, nos capítulos sobre Semelhança de Triângulos, a prova da proposição e do teorema por meio do uso do axioma e definições, além dos exercícios e problemas. E para o Livro B, temos um capítulo acrescido intitulado Revisão e Aprofundamentos, e mais o acréscimo de exercícios e problemas, em relação ao Livro A.

Os itens nomeados no decorrer dos capítulos dos dois livros, só se diferenciam apenas na quantidade de elementos de exercícios e problemas. Ao analisar o capítulo percebemos que, mesmo que no texto não tenha sido nomeado o termo definição, consideramos que o autor inicia o texto com uma definição.

No capítulo 7 analisado, é possível observar que o autor apresenta a definição de semelhança de triângulos, utilizando o registro discursivo e registro figural como partida e com registro simbólico como chegada. Além disso, percebe-se a ausência, nas representações dos triângulos, de marcações que evidenciem a abertura dos ângulos internos da figura. Tal ausência decorre do fato de que, nos trechos em que aparecem os registros simbólicos, $A \rightarrow E$, $B \rightarrow F$, $C \rightarrow G$, entendemos que se trata dos vértices do triângulo, enquanto $\hat{A}=\hat{E}$, $\hat{B}=\hat{F}$, $\hat{C}=\hat{G}$, referem-se à abertura dos ângulos correspondentes. Essa diferenciação, entretanto, não se evidencia no registro discursivo, haja visto que, segundo Duval (1995), o vértice (dimensão 0), os lados/segmentos de retas (dimensão 1) e a representação do triângulo (dimensão 2) são as unidades figurais relacionadas à Geometria.

Há quatro teoremas no capítulo analisado. O primeiro teorema é apresentado pelo autor como o segundo caso de semelhança de triângulos, sendo este identificado como (Ângulo–Ângulo), representado pela sigla AA. O segundo teorema refere-se ao primeiro caso de semelhança (Lado–Ângulo–Lado), indicado pela sigla LAL. O terceiro teorema aborda o terceiro caso de semelhança, (Lado–Lado–Lado), representado pela sigla LLL. Por fim, o quarto teorema corresponde ao Teorema de Pitágoras, conforme ilustrado na Figura 2.

Figura 2 - Quarto teorema do capítulo de Semelhança de triângulo

7.5. Teorema (Pitágoras). Em todo triângulo retângulo o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.

Em termos da notação estabelecida acima o teorema de Pitágoras afirma que

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Prova. A prova do teorema de Pitágoras é uma consequência da semelança dos triângulos ADB, CDA e ABC. Da semelhança de ADB e ABC $A \to C, B \to B$ e $D \to A$) conclui-se que

$$\frac{m}{c} = \frac{c}{a}$$

Da semelhança dos triângulos CDA e ABC conclui-se que

$$\frac{n}{b} = \frac{b}{a}$$

Logo $am = c^2$ e $an = b^2$. Portanto $a(m+n) = c^2+b^2$. Como $m+n = a$, então $a^2 = b^2 + c^2$, como queríamos demonstrar.

Fonte: Barbosa (1995, p. 80)

Esse teorema é uma consequência da semelhança de triângulos, considerando que para se fazer a sua prova utiliza-se da semelhança LLL. Note que na Figura 2, o autor tem como o registro de partida o registro discursivo e, ao realizar a prova, tem como registro de chegada o uso do registro discursivo e simbólico. Contudo, observa-se que, no decorrer da demonstração, não é utilizado nenhum registro figural, tampouco há explicação em um registro discursivo sobre o significado dos símbolos empregados na expressão $a^2 = b^2 + c^2$, não explicita que as letras a, b e c correspondem, respectivamente, à hipotenusa e aos dois catetos do triângulo retângulo.

Dessa forma, observa-se a ausência dos registros figural e discursivo complementares ao registro simbólico, como na expressão $\frac{m}{c} = \frac{c}{a}, \frac{n}{b} = \frac{b}{a}$, as quais deveriam permitir a identificação dos elementos m, n, a, b e c, os quais se infere corresponderem às medidas dos lados de triângulos semelhantes. Apesar de que o autor não faz referência, na Figura 2, uma representação figural do triângulo utilizado na prova, conjectura-se que, para a elaboração dos registros discursivo e simbólico, houve o uso implícito de um registro figural.

Segundo Duval (2012b, 2018), a ausência do registro figural limita as apreensões perceptiva e operatória da figura, dificultando que o leitor visualize, deduza e estabeleça relações entre as unidades figurais mencionadas nas proposições, comprometendo a compreensão das relações envolvidas. Para Almouloud (2003), as figuras desempenham um papel essencial na demonstração geométrica, pois possibilitam uma compreensão mais ampla do que a oferecida apenas pelo enunciado.

A inexistência de um registro figural explícito limita a apreensão perceptiva e operatória da figura, dificultando a conversão entre registro figural e registro simbólico, reduzindo a capacidade do estudante de reconhecer que diferentes representações se referem ao mesmo objeto matemático. Em termos cognitivos, tal limitação diminui a possibilidade do leitor desenvolver a visualização e o raciocínio necessários para realizar tratamentos e conversões que contribuam para a compreensão da Geometria.

É importante destacar que, no teorema anterior ao de Pitágoras, apresentado no mesmo capítulo, há a presença de um registro figural explícito que poderia ter sido retomado, na prova da figura 2 para preservar a coerência representacional do registro simbólico, conforme se observa a seguir.

Figura 3 - Resgate da figura no teorema anterior ao de Pitágoras no livro de Barbosa

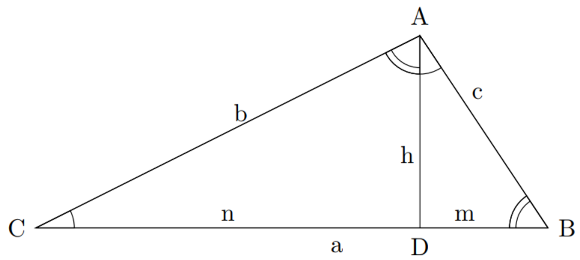


Figura 7.6

Como AD é perpendicular a BC, então os triângulos ADB e ADC são retângulos. Como $\hat{B} + \hat{C} = 90°$ e $\hat{B} + B\hat{A}D = 90°$ então

Fonte: Barbosa (1995, p. 79)

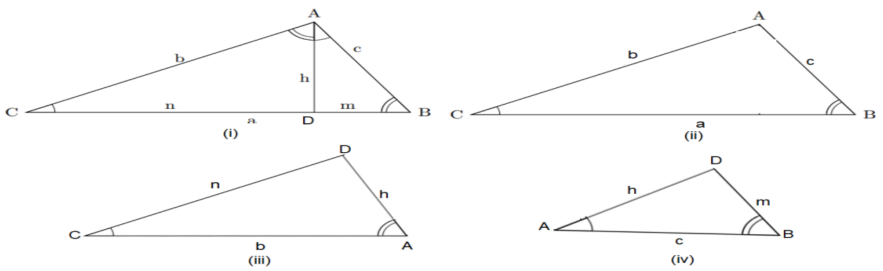
O registro figural apresentado na Figura 3, torna possível mobilizar a apreensão perceptiva e visualizar as unidades figurais, reconhecendo lados, vértices e aberturas dos ângulos correspondentes. Além disso, o registro figural possibilita acionar a apreensão operatória, por meio da modificação mereológica homogênea da figura, isto é, de acordo com Duval (2012b, p. 127), “em um fracionamento homogêneo, as partes obtidas possuem a mesma forma que o todo”.

Sobre o capítulo de semelhança de triângulos, temos duas proposições, as quais se relacionam com afirmações acerca do Teorema de Pitágoras aplicado no triângulo retângulo. Na segunda proposição, utiliza-se na prova a congruência de triângulo. E, na primeira proposição, discorre sobre a proporcionalidade entre os catetos e a hipotenusa, mas apenas uma afirmativa, sem nenhuma prova. Vale salientar que, na afirmativa da primeira proposição não tem nenhum registro figural e nem na prova da segunda proposição.

Assim, entendemos que esse uso apenas dos registros discursivo e simbólico impõe limitações para o leitor do livro para fazer deduções e relações com as unidades figurais apontadas nas proposições, definições e teoremas sem o uso do registro figural. Há problemas que só podem ser compreendidos como aponta Duval (1995) e Ferner (2019), com a desconstrução dimensional da figura, ou seja, quando representado o registro figural, então por meio da apreensão perceptiva, é possível visualizar, e reconhecer, no caso da representação do triângulo (dimensão 2) no registro figural, as suas unidades figurais como os lados/segmentos de retas (dimensão 1) e o vértice/ponto (dimensão 0), relacionando desse modo com a descrição do registro discursivo.

A partir da Figura 3, é possível realizar a apreensão operatória por meio da modificação mereológica homogênea da figura, evidenciando a relação entre o todo e suas partes. Na sequência, essa figura foi reconfigurada, originando subfiguras na forma de triângulos, as quais apresentamos na Figura 4. Essa reconfiguração permite observar que as subfiguras mantêm o mesmo formato do todo, possibilitando estabelecer relações com a desconstrução dimensional e compreender a explicitação dos registros discursivo e simbólico no quarto teorema — demonstração do Teorema de Pitágoras.

Figura 4 - Reconfiguração das partes da figura inicial do teorema LLL e para prova do quarto teorema



Fonte: Autoria Própria

Para a Figura 4, tanto para prova do teorema LLL como para o quarto teorema que é o teorema de Pitágoras, é necessário fazer a reconfiguração das partes da figura inicial. Inicialmente, reconfiguramos (i) em três triângulos (ii), (iii) e (iv). Estas reconfigurações, com a representações dos três triângulos é entendida como tratamento figurais, que segundo Duval (2012a, p.287) são “as operações que podem ser efetuadas materialmente ou mentalmente sobre as unidades figurais em uma figura geométrica, para obter uma modificação configural desta figura". Depois, deve-se relacionar os lados/segmentos correspondentes e abertura dos ângulos correspondentes entre os triângulos $ADB\ e\ ABC$, $CDA\ e\ ABC$, $ADC\ e\ ADB$ e se provar pela semelhança de triângulos, o teorema de Pitágoras, com a conversão e o tratamento para o registro simbólico.

Desse modo, concordamos com Duval (1995) que o registro figural que pode ser inibidor ou facilitador para resolução de uma questão, mas este é necessário ser apresentado simultaneamente com o registro discursivo, e assim ser interpretado através da desconstrução dimensional observando as unidades figurais e relacionando-as. E, na Figura 3, ao se fazer a reconfiguração foi necessário mobilizar a apreensão perceptiva e apreensão operatória, e desta última com modificações mereológicas (divisão/organização da figura) e modificações posicionais (rotação e translação dos triângulos CDA e ADB, em relação a posição da figura inicial). Como indica Duval (2012b, p.125), que na apreensão operatória toda representação figural pode ser modificada:

> Podemos dividi-la em partes que sejam como várias subfiguras, incluí-la em outra figura de modo que ela se torne uma subfigura: esta modificação é uma modificação mereológica, ela se faz em função da relação parte e todo. Pode-se também aumentá-la, diminuí-la ou deformá-la: esta modificação é uma modificação ótica, ela transforma uma figura em outra, chamada sua imagem. Esta transformação, que é realizada através de um jogo de lentes e espelhos, pode conservar a forma inicial ou alterá-la. Pode-se, enfim, deslocá-la ou rotacioná-la em relação às referências do campo onde ela se destaca: esta modificação é uma modificação posicional.

Enfim, notamos que nem todas as definições, teoremas, proposições e provas tem o registro figural apresentados, simultaneamente, aos registros discursivos e simbólico. Ademais, não notamos nenhum avanço ou acréscimos no que se trata dos conceitos discutidos nos Livro A e Livro B, nos capítulos analisados.

No entanto, o autor logo no primeiro capítulo do livro adverte o leitor da sua obra, "que os desenhos devem ser considerados apenas como um instrumento de ajuda" (Barbosa, 1995, p.2, grifo nosso). Entendemos por essa fala do autor usado o termo apenas, que o uso do registro figural não tem muita importância no seu ponto de vista, ocupando um segundo plano necessário a ensino e à aprendizagem de tal conceito, ou apenas ilustrativas e não fornecidas em escala. De acordo com Almouloud (2003), tendo como base Duval no seu estudo, aponta que para a aprendizagem da demonstração é mobilizada a apreensão operatória que pressupõe na dedução do teorema/proposições a tomada de consciência numa articulação entre dois registros, sendo um no registro discursivo (língua natural) e outro por meio da interação de um registro não discursivo, nesse caso consideramos o registro figural, pois em uma dedução a organização do cálculo demonstrativo não é nada evidente. Assim, é possível perceber o papel essencial que o registro figural tem em uma demonstração.

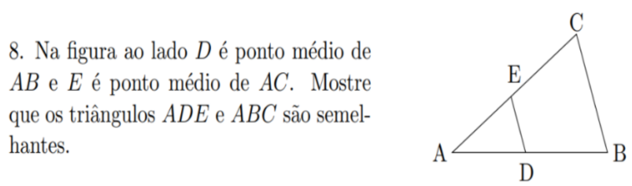
Sobre os exercícios e problemas, percebemos uma mudança na quantidade de questões propostas entre os dois livros. Isto é, no tocante aos exercícios, o livro passou de 11 (Livro A) para 30 (Livro B) e, com relação aos problemas, saiu de 8 (Livro A) para 21 (Livro B). No prefácio do livro *Geometria Euclidiana Plana*, Barbosa (2012), explica que a separação entre exercícios e problemas foi feita de modo a distinguir suas finalidades pedagógicas. Segundo o autor, os problemas visam complementar a teoria com um enfoque mais conceitual, enquanto os exercícios têm como principal objetivo a fixação do conteúdo apresentado.

Observamos que não existem questões que solicitam para fazer a construção da representação de figuras semelhantes. Sobre construções de triângulos, os estudos de Pereira da Costa e Rosa dos Santos (2018) e Pereira da Costa (2019), têm apontado que esse tipo de questão contribui para a aprendizagem do estudante, haja visto que mobiliza características importantes do triângulo na resolução.

Dada a sua importância e relevância, a análise realizada nos leva a perceber que o livro apresenta uma fragilidade ao não sugerir conexões entre os registros de representação semiótica. A inclusão dessas indicações potencializaria o ensino e a aprendizagem da geometria, ampliando as possibilidades de conexão entre os registros de representação semiótica.

Verificamos que na maioria das questões, o tipo de questão mais solicitada nos Livros A e Livro B são com o uso do termo "prove e mostre". Exemplificamos uma dessas questões de exercícios do livro na Figura 5.

Figura 5 - Conversão do registro discursivo para o registro simbólico (não congruência semântica)


8. Na figura ao lado D é ponto médio de AB e E é ponto médio de AC. Mostre que os triângulos ADE e ABC são semelhantes.

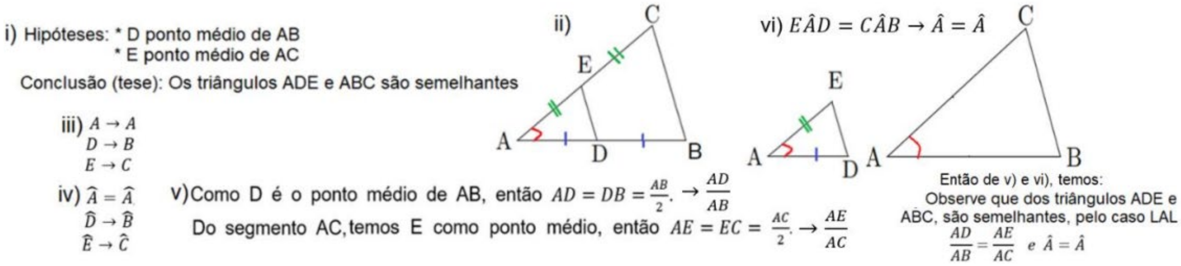
Fonte: Barbosa (1995, p. 82)

Nota-se que, na Figura 5, é possível identificar a presença dos registros figural, simbólico e discursivo. Ao realizar a análise, percebemos que o enunciado solicita que se mostre a semelhança entre as representações dos triângulos. Inicialmente, é necessário realizar o levantamento da hipótese, utilizando o registro simbólico, e da tese, com base no registro discursivo do enunciado, pois essas conversões possibilitam a resolução do problema. Segundo Almouloud (2003, posição 2045, Kindle), essa articulação favorece uma melhor compreensão do enunciado e, consequentemente, facilita o processo de resolução.

> O que se vê em uma figura depende de fatores de organização visual: esses fatores são aqueles que determinam a distinção, ou seja, o reconhecimento de certas formas de uma, duas e três dimensões em uma figura, e excluem a distinção de outras possíveis configurações e subfiguras na mesma figura (Duval, 2016, p.81, tradução nossa).

Desse modo, na Figura 6 abaixo, realizamos decomposição mereológica da Figura 4, a qual aumenta o potencial de visualização, para obtenção de uma possível solução, pois depois desses passos pode-se, então, começar a fazer as correspondências possíveis, da tese, como entre os triângulos ADE e ABC (dimensão 2), dos vértices (dimensões 0) (iii), da abertura dos ângulos (iii), dos lados (dimensão 1) e razão de proporcionalidade entre os lados correspondentes, com o uso do teorema LAL, depois redigir a demonstração.

Figura 6 - Hipótese e Tese do exercício apontado na figura 5



Fonte: Autoria Própria

Para essa Figura 6, a nossa intenção é realizar alguns apontamentos de caminhos possíveis para realização da prova e os registros mobilizados. Espera-se que se realize a conversão do registro discursivo (registro de partida) para o registro simbólico (registro de chegada).

Considerações Finais

Após a análise, à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, verificamos que as edições dos livros analisados, em seus contextos teóricos do conteúdo, apresentaram os registros discursivos, simbólico e figural. Em geral, como registro de partida mais explorado foi a língua natural (registro discursivo), sendo no registro de chegada o uso do registro simbólico mais mobilizado. Para alguns conceitos e provas encontramos junto ao registro discursivo, o registro figural como intermediário, no registro de partida, mas para o de chegada tem-se o registro simbólico, sendo assim, não identificamos, nos conteúdos e nos tipos de exercícios e problemas, a conversão inversa entre registros.

Ainda, percebemos que no decorrer do texto sobre os conceitos, não houve mudanças ou acréscimos. Já as provas, sentimos falta de exemplos resolvidos com aplicações das demonstrações, para uma melhor compreensão das definições, teoremas, axiomas, proposições e provas, explicitadas, que permita o leitor/estudantes fazer deduções.

Referências

ALMOULOUD, S. A. Registros de representação semiótica e compreensão de conceitos geométricos. In. MACHADO. S.D. A (Org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. 4.ed .Campinas, SP; Papirus. Edição do Kindle, p. posição 1974 - 2302, 2003.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**.Coleção do Professor de Matemática. 2ª Edição, Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, Rio Janeiro,1995.

______________. **Geometria Euclidiana Plana**. Coleção do Professor de Matemática. 11ª Edição, Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, Rio Janeiro, 2012.

DUVAL.R. **Sémiosis et pensée humaine:** registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne: Peter Lang, 1995.

______________. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In. MACHADO. S.D. A (Org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. 4.ed. Campinas, SP; Papirus, p.11 – 34, 2003.

______________.**Semiósis e pensamento humano:** registro semiótico e aprendizagens intelectuais. Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

______________. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Méricles Tadeu Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012a.

______________. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução: Méricles Tadeu Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v. 07, n. 1, p. 118-138, 2012b.

______________. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. Tradução: Méricles Tadeu Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v. 07, n. 1, p. 97-117, 2012c.

______________. **Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas.** (2016) Disponível:

http://funes.uniandes.edu.co/12213/1/Duval2016Un.pdf .Acesso: maio de 2023.

______________. Como Analisar A Questão Crucial Da Compreensão Em Matemática?. Tradução: Méricles Tadeu Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v. 13, n. 2, p. 1-27, 2018.

FERNANDES SILVA, F. A. **Graus de não congruência semântica nas conversões entre os registros geométricos bidimensional e simbólico fracionário dos números racionais.** 2018. 258f. Tese (Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2018.

FERNER, D. L; SOARES, M. A. S; MARIANE, R. C. P. Geometria nas licenciaturas em Matemática: um panorama a partir de Projetos Pedagógicos de Cursos. **Ensino Em Re-Vista.** Uberlândia, MG, v.27, n.2, p.434 - 457, 2020a.

______________. Tarefas envolvendo Geometria: análise de um livro de matemática indicado em Projetos Pedagógicos de Cursos de Matemática Licenciatura. **Boletim online de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 8, n. 16, p. 52-71, dezembro/2020b.

FERREIRA, M. B. C.; ALMOULOUD, S.A. Análise dos livros de geometria indicados nos cursos de licenciatura em matemática. **REVEMAT**. Florianópolis – SC, v.12, n. 2, p. 16-57, 2017.

FONSECA, J. A.; LEIVAS, J. C. P. Triângulos: uma experiência utilizando a teoria de Van Hiele. **Revista Multidisciplinar de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura**. v.7, n.14, p. 137-154. abril,2018.

KAUARK, F.S; MANHÃES, F. C; MEDEIROS, C. H. **Metodologia da Pesquisa:** Um guia prático. Itabuna: Via Litterarum, 2010.

LEIVAS, J. C. P. Investigando o último nível da teoria de Van Hiele com alunos de pós-graduação - a generalização do teorema de pitágoras. **Revista VIDYA**. Santa Maria –RS, v. 37, n. 2, p. 515-531, 2017.

MOREIRA, P. G. S. **Jogos de linguagem e geometria euclidiana plana:** um olhar terapêutico wittgensteiniano para dois manuais didáticos usados em cursos de licenciatura em matemática.2018. 99F. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2018.

MOURA.L.K.J.; KRINDGES.A.; WIELEWSKI, G.D. As vantagens do modelo de Van Hiele no ensino de geometria. **Educação Matemática em Revista** – RS, n. 21 - v.2. p. 56-65, 2020.

NASCIMENTO, A. A. **Análise dos tipos de provas matemáticas e pensamento geométrico de alunos do 1º ano do Ensino Médio**. 2017. 166f. Dissertação (Mestrado Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande/PB, 2017.

OLIVEIRA, E. C.; CHIUMMO, A. Análise da aprendizagem de semelhança de triângulos por alunos de graduação em matemática. **Revista VIDYA**, v. 35, n. 2, p. 179-195, jul./dez., 2015 - Santa Maria, 2015.

PEREIRA DA COSTA, A. **A construção de um modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico:** o caso dos quadriláteros notáveis. 2019. 402 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2019.

______________. **A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º ano do ensino fundamental:** um estudo sob a luz da teoria vanhieliana. 2016. 283f.

Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

______________. A geometria na educação básica: um panorama sobre o seu ensino no Brasil. **Revista Educação Matemática em Foco**. v.9, n.1, p.128-152.janeiro / abril 2020.

PEREIRA DA COSTA, A.; ROSA DOS SANTOS, M. O pensamento geométrico de professores de matemática em formação inicial. **Revista Educação Matemática em Revista** – RS. v.2 , n.18, p. 18 a 32. 2017.

______________. Uma análise praxeológica do ensino de triângulos no 8º ano do ensino fundamental. **Revista Educação Matemática em Revista** – RS. v.2 , n.19, p. 189 a 197. 2018.

PEREIRA SILVA. **Congruência de triângulos no geogebra:** uma proposta didática para o ensino fundamental. 2018, 147f, Dissertação de mestrado (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia/MG.

REZENDE, D.P. L. **Ensino e aprendizagem de geometria no 8º ano do Ensino Fundamental:** uma proposta para o estudo de polígonos. 2017. 156f, Dissertação de mestrado (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Juiz de Fora. UFJF, Juiz de Fora/MG. 91

RODRIGUES, C. S.; CARRIÃO, A. A mudança de registro semiótico na resolução de problemas contextualizados: o caso da trigonometria no triângulo retângulo. Revista **Educação Matemática em Revista** – RS. Ano 16 - 2015 – n. 16 - v.1 - p. 6 a 21.

SILVA, A. B. **Triângulos nos livros didáticos de matemática dos anos iniciais do ensino fundamental:** um estudo sob a luz da teoria dos registros de representação semiótica. 2014. 119f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2014.

SILVA, A. L. G. ; ROSA DOS SANTOS, M. O estudo dos quadriláteros notáveis em um livro didático de matemática sob o olhar da teoria antropológica do didático. In: Marilene Rosa dos Santos; André Pereira da Costa. (Org.). **Subir a montanha para ampliar a vista:** alguns cenários de pesquisas em educação matemática. 1ed.Recife: Editora UFPE, 2021, p. 20-42.

SILVA. P. C. N.; NASSER, L. **Investigando a aprendizagem significativa de geometria no 8º ano com o apoio de uma sequência didática**. Revista Pesquisa e Ensino. v. 2, p. 1 - 23, 2021.

SOUZA, R.N.S; MORETTI, M.T; ALMOULOUD, S.A. A aprendizagem de Geometria com foco na desconstrução dimensional das formas. **Revista Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n.1, p. 322-346, 2019. 92

YIN, R.K. **Estudo de caso:** Planejamento e métodos. 2 ed. Porto Alegre: Blokman, 2001.