

A integral definida: dificuldades e possibilidades para seu ensino e sua aprendizagem

JANINE FREITAS MOTA¹

CELINA A. A. P. ABAR²

Resumo

Este trabalho é um recorte de uma tese de doutorado em desenvolvimento e tem como temática os processos de ensino e de aprendizagem da Integral Definida em cursos de Matemática e/ou Engenharias. Tem o objetivo de desenvolver uma alternativa pedagógica que contempla as aplicações, o aprimoramento do conhecimento e do significado da Integral Definida, em contextos intramatemáticos e extramatemáticos. Neste texto, de concepção teórica, são abordados aspectos relacionados às dificuldades na aprendizagem do Cálculo Integral. Aspectos teóricos, metodológicos e tecnológicos são apresentados como orientadores da estratégia pedagógica. Como resultado parcial, é apresentada uma proposta de articulação entre a teoria e a prática na perspectiva de melhorias na qualidade do ensino e aprendizagem da Integral Definida.

Palavras-Chave: *Integral Definida; Tecnologias Digitais no Ensino do Cálculo; Educação Matemática no Ensino Superior.*

Abstract

This work is a part of a doctoral thesis in development and its theme is the teaching and learning processes of Integral Definite in Mathematics and / or Engineering courses. It has the objective of developing a pedagogical alternative that contemplates the applications, the improvement of the knowledge and the meaning of the Definite Integral, in intra mathematical and extra mathematical contexts. In this text, with theoretical approach, it is shown aspects related to the difficulties in learning the Integral Calculus. Theoretical, methodological and technological aspects are approached as a guide of the pedagogical strategy. Partly as a result, it is presented a purpose of articulation between theory and practice in the improvement prospects of teaching and learning quality of Definite Integral.

Keywords: *Definite Integral; Digital Technologies in Calculus Teaching; Mathematics Education in Higher Education.*

Introdução

O Cálculo Diferencial e Integral constitui-se em um domínio de conhecimentos relevante para a sociedade científica, principalmente, pela potencialidade de sua utilização na resolução de problemas de distintas áreas. Sua capacidade de reduzir problemas complexos em procedimentos simples, nas mais diversas áreas, faz desse conteúdo matemático uma descoberta importante da humanidade.

¹ Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PEPG em Educação Matemática – e-mail: janinemota@gmail.com.

² Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PEPG em Educação Matemática – e-mail: abarcaap@gmail.com.

Atuando como docente em cursos da área de Ciências Exatas em instituições públicas e privadas, percebemos as dificuldades de aprendizagem dos estudantes na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, corroboradas por pesquisas nesse tema. Distintos pesquisadores, como Tall (2002), Rezende (2003), Reis (2009), Alves (2011), evidenciaram que tais dificuldades não fazem parte de um cenário apenas brasileiro, mas constatadas em âmbito internacional, como destaca Rezende (2003). Esse autor ressalta um movimento internacional organizado na década de 80, intitulado *Calculus's Reform*, que procurou reorganizar o ensino de Cálculo, utilizando como inovação recursos tecnológicos.

Essa problemática é composta por vários fatores, como: i) causas de natureza cognitiva (falta de compreensão de significados), como exposto por Tall (2002); ii) as de natureza didática, que se referem à dificuldade em encontrar a metodologia mais adequada ao ensino; iii) dificuldades de natureza epistemológica, na qual “as raízes do problema estão além dos métodos e das técnicas, sendo inclusive anteriores ao próprio espaço-tempo local do ensino de Cálculo” (REZENDE, 2003, p. 4); iv) falta de conhecimentos prévios e dificuldades relacionadas ao raciocínio lógico, uma vez que a matemática do ensino superior exige dos estudantes a capacidade de utilizar argumentos lógicos para provar afirmativas, conforme destaca Nasser (2009).

Artigue (1991) abordou as dificuldades que surgem para os estudantes no curso introdutório de Cálculo, destacando que, no ensino tradicional da referida disciplina, tais dificuldades geralmente são resolvidas por meio de uma excessiva algebrização, especialmente, quanto ao predomínio da manipulação de fórmulas, em detrimento do estudo das funções; ao cálculo de derivadas, em detrimento das aproximações lineares; ao cálculo de primitivas, em detrimento da busca de significados para a integral; aos algoritmos para calcular equações diferenciais, em detrimento de solucioná-las por meio de aproximações numéricas e gráficas.

As pesquisas acima elencadas e a nossa prática como docente da disciplina Cálculo nos fazem perceber que os estudantes têm dificuldades de aprendizagem por não desenvolverem habilidades específicas, necessárias ao aprendizado do Cálculo, tais como: criar hipóteses, mobilizar o raciocínio dedutivo, manipular ideias, fazer generalizações e utilizar os conhecimentos adquiridos na resolução de situações reais que lhes são apresentadas; além de utilizar diferentes tipos de registros de representação como, por exemplo, escrita em língua natural ou materna, escrita algébrica, por tabelas,

gráficos cartesianos e figuras. Ainda, Artigue (1991), de forma específica, cita as dificuldades de aprendizagem da Integral, que é um tópico de estudo do Cálculo que se concebe como uma ferramenta transdisciplinar útil na resolução de vários problemas que descrevem aspectos da realidade.

A integral pode ser aplicada em diversas áreas de estudos, como, por exemplo, em geometria, física, computação, economia, dentre outras, colocando-se como ferramenta de diversas aplicações; por esse motivo, está presente nos conteúdos programáticos de vários cursos superiores como: Matemática, Engenharias, Biologia, Economia, dentre outros.

No entanto, destacamos que o estudante, por não conseguir estabelecer conexões entre teoria e prática, tem dificuldades em entender os conceitos relacionados à integral, restringindo-se aos resultados especificamente numéricos, encontrados por meio de aplicações de técnicas, não percebendo os significados daquelas medidas nas mais distintas áreas das ciências. Ressalta-se, pelas pesquisas e por nossa experiência docente, que os professores tendem a trabalhar pouco as potencialidades que a integral pode trazer para a construção do conhecimento e que “apesar de sua grande importância, o ensino de integrais limita-se, muitas vezes, à memorização de técnicas de integração”. (REZENDE, 2013, p. 189).

Diante desse cenário, esta pesquisa caminha no sentido de propor uma alternativa pedagógica para os processos de ensino e de aprendizagem da Integral Definida, promovendo situações em que o estudante poderá ampliar seu conhecimento sobre o significado da Integral, tendo contato com aplicações desse tópico em diversas áreas do conhecimento.

1 A Integral Definida como objeto de investigação

Uma das aplicações da integral se destina a delimitar a área localizada sob uma curva em um plano cartesiano. Matemáticos e não matemáticos, ao longo do tempo, debruçaram-se em estabelecer processos para cálculo de áreas de forma a ampliar os conhecimentos matemáticos e de outros ramos científicos do mundo contemporâneo. Assim, esse objeto de estudo é abordado em níveis de profundidade diferentes, dependendo de cada curso.

No entanto, faz-se necessária uma abordagem voltada não só para as técnicas e métodos para o cálculo algébrico das integrais definidas das várias funções matemáticas, mas também para a representação das diversas aplicações. Entretanto, com um cronograma limitado, o docente não tem oportunidade de, apenas no ambiente de sala de aula, explorar as várias aplicações que fazem parte desse contexto. Em geral, as aplicações mais usuais estão relacionadas ao cálculo de área de uma região, comprimento de uma curva e volume de um sólido de revolução, trabalhadas, na maioria das vezes, com exemplos matemáticos desconectados do mundo real. Porém, são possíveis várias outras aplicações que são interessantes e importantes.

A partir desse contexto, indagamos: Em que medida os estudantes se apropriam do significado dos resultados encontrados nas integrais definidas? Que estratégias devem ser apresentadas ao estudante para que possam estabelecer conexões entre a teoria estudada sobre integrais definidas e situações em que essa teoria possa ser utilizada na prática? Quais os conceitos intramatemáticos e extramatemáticos (em outras disciplinas: física, química, biologia) podem ser explorados por meio de situações problemas que envolvem integrais definidas? Que significados tem a integral, considerando as interpretações geométricas e, mais precisamente, a medida de área e volume de superfície? Que práticas podem ser realizadas para que possam emergir os significados da integral definida em diferentes áreas? Como a integral definida poderá ser trabalhada, considerando a transdisciplinaridade?

A escolha da Integral como objeto matemático de nossa investigação justifica-se por sua relevância na área de Matemática; por suas aplicações em outras áreas do conhecimento e pelo fato que de, em nossa experiência profissional, percebemos que as práticas pedagógicas comumente usadas dão conta apenas do trabalho com a integral definida de forma mecânica e os estudantes não conseguem estabelecer conexões dos resultados encontrados com outros significados que aqueles possam ter.

Corroboramos com Kouropatov e Dreyfus (2009) em que:

certamente não é possível imaginar a cultura científica moderna sem as integrais. Juntamente com a derivada, a integral forma o núcleo de um domínio matemático que é uma linguagem, um dispositivo e uma ferramenta útil para outros campos como a física, a engenharia, a economia e a estatística. Além disso, o conceito de integral representa uma ideia filosófica para a compreensão do mundo: a contemplação

da totalidade das partes pequenas de um todo aporta conclusões sobre o todo em sua globalidade, assim como sobre sua estrutura interna e propriedades (KOUROPATOV e DREYFUS, 2009, p. 417).

Diante das indagações acima, direcionamos nosso trabalho no sentido de responder a uma questão principal para nossa pesquisa: como múltiplas aplicações podem contribuir para uma aprendizagem da integral definida com compreensão? Para tanto, realizamos um estudo sobre o ensino de cálculo integral no sentido de possibilitar a discussão dos aspectos epistemológicos, cognitivos, didáticos e tecnológicos, referentes aos processos de ensino e de aprendizagem de aplicações das Integrais. Nesta pesquisa, procuramos também referenciais teóricos acerca das contribuições do Pensamento Matemático Avançado para melhoria dos processos de ensino e de aprendizagem das Integrais, com enfoque para as aplicações em contextos intramatemáticos e extramatemáticos.

Selecionamos e analisamos, no Banco de Teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), a produção científica que tem por temática os processos de ensino e de aprendizagem da Integral Definida. A leitura desses trabalhos sobre o Cálculo Integral foi essencial para ajudar-nos a delimitar caminhos em busca da condução da nossa pesquisa. Inicialmente, selecionamos pesquisas, em nível de doutorado, no período de 2014 até o primeiro semestre de 2018, usando a expressão “ensino de cálculo integral”. O filtro foi realizado pela grande área de conhecimento “Multidisciplinar”, seguido da área de conhecimento “Ensino de Ciências e Matemática”. Fizemos a leitura dos títulos desses trabalhos e selecionamos 09 (nove) teses com direcionamento, de acordo com seu título, para o ensino e aprendizagem do cálculo integral. Em seguida, ampliamos a busca incluindo também dissertações de mestrados que tratam do ensino e aprendizagem do Cálculo Integral. Assim, foram selecionados 23 registros referentes a esse tema. Com esse estudo, pretendemos subsidiar-nos teoricamente para propor situações com múltiplas aplicações da integral definida que possam contribuir para o aprendizado desse conceito.

2 Aspectos teóricos e metodológicos subjacentes à pesquisa

A pesquisa contribui para o desenvolvimento profissional do professor-pesquisador, ampliando seus conhecimentos teóricos, práticos e investigativos referentes ao processo de ensino e de aprendizagem de conteúdos relacionados ao Cálculo Integral; contribui, ainda, para a aprendizagem significativa do acadêmico orientando que participa

ativamente do processo investigativo; contribui para a Comunidade Acadêmica (professores e acadêmicos) que tem a possibilidade de usufruir das atividades elaboradas no desenvolvimento desta.

No desenvolvimento de nossa tese, estão sendo considerados aspectos teóricos e metodológicos referentes ao Pensamento Matemático Avançado e da Engenharia Didática articulados com o Enfoque Ontossemiótico. Sequências didáticas estão sendo desenvolvidas com enfoque em aplicações da Integral Definida. Essas sequências poderão ser aplicadas à estudantes de Cálculo dos cursos de Matemática e/ou Engenharias.

As sequências didáticas possibilitam ao estudante construir um conhecimento significativo, ao mesmo tempo em que desencadeiam indagações, refutações e comparações, integrando as informações obtidas e descobertas. Almouloud e Coutinho (2008) retratam a Engenharia Didática baseada no Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática:

A noção de Engenharia Didática emergiu na Didática da Matemática (enfoque da didática francesa) no início dos anos 80. Segundo Artigue (1988), é uma forma de trabalho didático comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto, se apóia em conhecimentos científicos de seu domínio, aceita se submeter a um controle de tipo científico, mas ao mesmo tempo, é obrigado a trabalhar objetos mais complexos que os objetos depurados da ciência. A Engenharia Didática, vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se, em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e modo de validação que lhe são associados: a comparação entre análise *a priori* e análise *a posteriori* (ALMOULOU; COUTINHO, 2008).

Uma Engenharia Didática, segundo Artigue (1996), inclui quatro fases: 1) análises prévias; 2) concepção e análise *a priori* de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas na sala de aula de Matemática; 3) implementação da experiência; 4) análise *a posteriori* e validação da experiência. Essas fases, interpretadas de acordo com o Enfoque Ontossemiótico, aportam ferramentas teóricas e metodológicas que possibilitam uma análise mais detalhada do objeto de estudo. Por essa razão, em nossa

pesquisa, utilizaremos as quatro fases distintas da Engenharia Didática, baseadas no Enfoque Ontossemiótico, considerando as dimensões de análise (GODINO *et. al*, 2014): 1) estudo preliminar das dimensões epistêmica-ecológica, cognitiva-afetiva e instrucional; 2) desenho da trajetória didática, seleção dos problemas, sequenciação e análise *a priori*, com indicação dos comportamentos esperados dos estudantes e do planejamento das intervenções controladas do docente; 3) implementação da trajetória didática; observação das interações entre pessoas e recursos e avaliação da aprendizagem atingida; 4) avaliação ou análise retrospectiva, baseada em um contraste entre o previsto no desenho da atividade e o observado em sua implementação. Também se realiza uma reflexão sobre as normas que condicionam o processo instrucional e sobre a idoneidade didática.

Em cada uma dessas fases, são utilizadas, em nossa pesquisa, as seguintes dimensões de análise: *epistêmica-ecológica*: na qual são determinados os significados institucionais que estão presentes em cada fase, observando-se as relações e restrições institucionais que condicionam o processo de ensino e aprendizagem dos temas matemáticos – nesse caso, pesquisamos qual significado institucional da integral definida será destacado em cada fase; *cognitiva-afetiva*: que consiste na descrição dos significados pessoais dos estudantes em distintos momentos do processo de estudo. Contempla também a análise da sensibilidade do processo aos estados afetivos (atitudes, emoções, crenças, valores) dos estudantes com relação aos objetos matemáticos e ao processo de estudo – nessa fase é verificado qual significado pessoal o estudante apresenta para a Integral Definida, destacando o que esse conteúdo representa em cada uma das áreas ou subáreas em que está sendo aplicada; *instrucional*: baseada na análise dos padrões de interação entre docente, discente e a sequência didática, focada na fixação e na negociação de significados – fase que ainda será realizada e irá refletir sobre a atuação do estudante e professor na execução das atividades propostas.

2.1 Pensamento Matemático Avançado

As pesquisas relacionadas ao “Pensamento Matemático Avançado”, com enfoque no Cálculo, são consideráveis; alguns aspectos do Pensamento Matemático Avançado estão sendo utilizados em nossa pesquisa. Tall (1991), ao abordar a transição do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado, ressaltou que:

O câmbio do pensamento matemático elementar para o

avanzado envolve um convencimento à demonstração de maneira lógica baseada nas definições. Essa transição requer uma reconstrução cognitiva, que se manifesta durante os conflitos iniciais dos estudantes universitários com as abstrações formais enfrentadas por eles no primeiro ano da universidade (TALL, 1991, p. 20).

Nossa experiência profissional no ensino de Cálculo, tanto na universidade pública quanto em faculdades privadas, tem evidenciado as dificuldades que os estudantes, geralmente, apresentam durante o desenvolvimento do Cálculo I.

Para Dreyfus e Eisenberg (1990), isso se deve ao fato de o Cálculo constituir-se em um ramo da matemática superior que exige maior tempo aos estudos sobre problemas não triviais que, geralmente, estão presentes em seu processo de aprendizagem. Artigue (1998) ressalta que a formalização dos conteúdos de Matemática, requerida dos estudantes universitários, obriga-os a romper com o trabalho algébrico.

Os autores Dreyfus (1991) e Tall (1991) afirmam que o Pensamento Matemático Avanzado (PMA) permeia a aprendizagem de muitas definições matemáticas complexas que podem aparecer nos mais variados níveis escolares, manifestando-se com maior intensidade nos anos finais do ensino médio e ao longo do ensino superior. Dreyfus (1991) apresenta que “é possível pensar em tópicos matemáticos avançados numa forma elementar e pode ter-se pensamento avançado sobre tópicos elementares” (p. 26). Tall (1991) diz que “a mudança do pensamento matemático elementar para o avançado envolve uma transição significativa: do descrever para o definir, do convencer para o provar numa maneira lógica baseada nessas definições” (p. 20).

É possível que uma das causas da pouca compreensão nos conceitos relativos à integral seja a dificuldade dos alunos na transição do pensamento matemático elementar que se refere à integral definida para o pensamento matemático avançado. Em nossas sequências de atividades serão destacadas situações que partem do elementar da Integral Definida para características e/ou propriedades em um nível de maior análise.

3 Síntese Metodológica

Trabalhamos, em nossa pesquisa, com uma abordagem qualitativa, focada na aprendizagem dos estudantes de cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharias,

sobre as aplicações da integral definida em contextos intramatemáticos e extramatemáticos, que envolvem a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada.

Nossa proposta metodológica é desenvolver aplicações da Integral Definida, por meio de sequências de atividades que desafiem a curiosidade, possibilitando ao estudante refletir sobre propriedades e conceitos que possam emergir da prática realizada. De acordo com Dreyfus (2002), para que um estudante atinja a compreensão de um objeto matemático não é suficiente apenas definir e exemplificar um conceito abstrato, mas sim construir as propriedades de um determinado conceito por meio de deduções a partir da definição. Esta reflexão sobre as experiências realizadas é uma característica do Pensamento Matemático Avançado à qual pretendemos que nosso estudante desenvolva.

Algumas aplicações a serem utilizadas na pesquisa terão suporte das tecnologias digitais, mais precisamente do *software* GeoGebra para implementação dessas. Por meio da tecnologia, pretendemos que o estudante possa criar uma relação entre o real (objetos tridimensionais do mundo real) e suas possíveis representações matemáticas, de forma a explorar as capacidades de abstração e formalização de ideias.

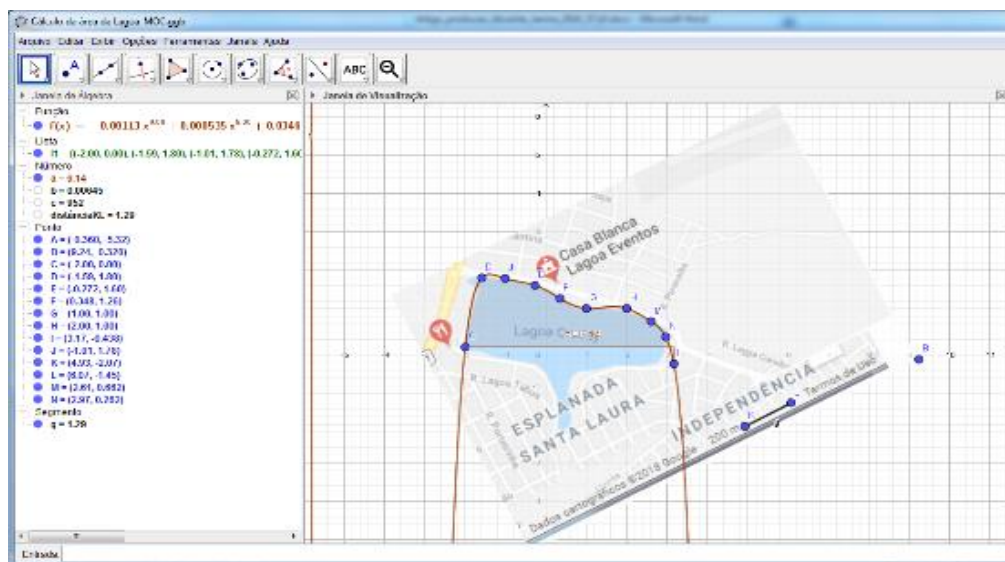
Em uma aplicação, em desenvolvimento, o estudante deverá calcular a área de uma superfície irregular. Essa superfície está relacionada com algo real como, por exemplo, a área de uma lagoa ou de um terreno a ser murado pelo proprietário. O estudante é orientado a seguir alguns passos: procurar o mapa dessa superfície, dimensionar a figura e posicioná-la de forma que se possa calcular a área de uma parte daquela, inserir pontos na figura, usar as ferramentas do *software* GeoGebra para gerar uma função que represente o contorno da imagem e, a partir daí, calcular a área dessa superfície. O estudante é também orientado a utilizar uma escala adequada para dimensionar a área real daquela superfície.

Apresentamos, na figura 1, um esboço da atividade, fruto das primeiras implementações, ainda em desenvolvimento, estando suas potencialidades didáticas em fase de reflexões e aperfeiçoamento.

Essa atividade contempla o conceito de Integral Definida relacionando a área da figura com a área de uma lagoa existente na cidade de Montes Claros-MG. O objetivo é que o estudante relacione a teoria com uma situação da sua realidade, que nesse caso é

dimensionar, aproximadamente, a área de uma lagoa de sua cidade, utilizando o *software* Geogebra, fazendo articulação teórico-prática. Espera-se que o estudante evoque conhecimentos intuitivos sobre a integral definida. Esse será orientado a: 1) procurar no *Google Maps* o mapa da Lagoa; 2) dimensionar a figura e posicioná-la de forma que se possa calcular a área de uma parte dessa; 3) inserir alguns pontos na figura, considerando pontos de interseção com os eixos, pontos de máximo, mínimo, de inflexão; 4) usar a ferramenta Lista e selecionar os pontos marcados; 5) gerar uma função que se aproxime da função que demarca as bordas da parte da lagoa; 6) calcular a área dessa parte da lagoa, usando o recurso integral. Após esses passos, o estudante deverá refletir sobre a escala adequada e fazer a proporção correta para a medida da área da figura e a medida real, aproximada, da área da lagoa. Ao desenvolver essa atividade, o estudante irá utilizar o pensamento matemático, pois, conforme afirma Dreyfus (1991), esse tipo de pensamento consiste na interação entre vários processos, como os de representar, visualizar, generalizar, entre outros. O estudante irá se envolver na construção, utilizando sua abstração, isso é imprescindível no processo do pensamento matemático, uma vez que, para Dreyfus (1991), por meio de abstração e representação, é possível passar de um nível do pensamento matemático para o outro.

Figura1- Imagem desenvolvida no *software* GeoGebra.



Fonte: Dados da pesquisa.

Outras aplicações da integral definida, relacionadas a outras áreas como biologia, física e estatística, estão sendo implementadas em nossa pesquisa.

Nessa perspectiva, guiamo-nos para a análise e descrição dos dados qualitativos,

objetivando compreender como se dá a aprendizagem a partir da construção dos conceitos relacionados às aplicações das integrais definidas.

Considerações finais

A importância do ensino de integrais na formação do professor é importante, pois ela representa a ferramenta para diversas aplicações, como, por exemplo: cálculo de áreas, perímetros, volumes, trabalho realizado por uma força, centro de massa, montante, dentre outras.

Defendemos a ideia de que o ensino da técnica é fundamental, porém, a técnica isolada não possibilita uma aprendizagem significativa. Por isso, nossa pesquisa engloba a utilização de aspectos das aplicações na condução do processo de ensino das Integrais Definidas, pois um processo de ensino e aprendizagem baseado na relação teoria e prática pode-se revelar um ambiente rico para essas conexões. A articulação coerente entre a teoria e a prática, por meio da investigação, consiste em um objetivo a ser alcançado na educação.

Em muitos casos, há uma restrição da didática com problemas usuais e, muito frequentemente, problemas relacionados à física. Esse tipo de procedimento leva à formação deficitária do acadêmico que, quando depara com situações diferentes, não sabe resolver o problema proposto, ou mesmo, não tem ideia de se os resultados obtidos expressam o que realmente eles pretendiam determinar.

Durante o desenvolvimento das atividades, espera-se que os estudantes possam fazer observações, levantar conjecturas, buscando validá-las. Como se trata de uma pesquisa em andamento, ainda não temos resultados para análise, que ocorrerá de forma qualitativa a partir da observação e dos registros das atividades desenvolvidas pelos acadêmicos em consonância com os resultados das pesquisas realizadas em didática do Cálculo.

Agradecimentos

Agradecemos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela Bolsa de Estudos concedida, o que está permitindo o desenvolvimento desta pesquisa.

Referências

- ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. Q. S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v.3, n.6, p. 62-77, 2008.
- ALVES, F. R. V. **Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis**. 2011. 353 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011.
- ARTIGUE, M. Analysis. In: TALL, D. (ed.), **Advanced mathematical thinking**. Netherlands: Kluwer, 1991. p. 167-198.
- _____. Engenharia Didática. In: BRUN, J. **Didática das Matemáticas**. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.
- _____. L'évolution des problématique sem didactique de l'analyse. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 18, n. 2, p. 231-262, 1998.
- DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: TALL, D. (Ed.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1991. p. 25-41.
- DREYFUS, T.; EISENBERG, T. On difficulties with diagrams: theoretical issues. In: **Proceedings of the Fourteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education**, 2, p. 27-33, 1990.
- GODINO, J. D.; RIVAS, H.; ARTEAGA, P.; LASA, A.; WILHELMI, M. R. Engenharia didática baseada na abordagem ontológico - semiótica do conhecimento e instrução matemática. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 34, p.167-200, 2014. Disponível em: < https://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm >
- KOUROPATOV, A.; DREYFUS, T. Integrals as accumulation: a didactical perspective for school mathematics. In: TZEKAKI, M.; KALDRIMIDOU, M.; SAKONIDIS, H. (eds.). **Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Vol. 3, pp. 417-424. Thessaloniki, Greece: PME, 2009.
- NASSER, L. Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos. In: FROTA, M.C.R.; NASSER, L. (org.). **Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates**. Recife: SBEM, 2009. p. 43-58.
- REIS, F. S. Rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.) **Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisa e Debates**. Recife: SBEM, 2009. p. 81-98.
- REZENDE, W.M. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica**. 2003. 468f. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação. Universidade de São Paulo. São Paulo, 2003.
- TALL, D. **Advanced Mathematical Thinking**, New York, Kluwer Academic Publishers, 2002.
- _____. The psycology of advanced mathematical thinking. In: TALL, D. (ed.). **Advanced Mathematical Thinking**. Netherlands: Kluwer, A. P., 1991. p. 3-21.