

Um estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de Sistemas Lineares 3x3 no 2º ano do Ensino Médio¹

ANA LUCIA INFANTOZZI JORDÃO²

BARBARA LUTAIF BIANCHINI³

Resumo

A partir de um recorte feito na dissertação de mestrado, investiga-se se os alunos do Ensino Médio compreendem a resolução dos sistemas lineares 3x3, por meio de uma abordagem que favorece a conversão e o tratamento de registro de representação, aliados a um ambiente computacional. Foi elaborada, aplicada e analisada uma sequência didática que aborda a resolução algébrica e gráfica dos sistemas lineares 3 x 3 com o auxílio do software educacional Winplot. Como referencial teórico, o estudo baseia-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (2003) e, como metodologia, adota os pressupostos da Engenharia Didática, segundo Artigue (1996). Os resultados dessa pesquisa mostram a relevância do uso do software educacional Winplot na contribuição para visualizar e compreender a resolução de sistemas lineares em 3D.

Palavras-chave: sistemas lineares; registro de representação semiótica; software Winplot.

Abstract

From a fragment made in the thesis, it is investigated if High School students comprehend the solving of 3x3 linear systems through an approach that favors the conversion and treatment of the representation register, associated with a computational environment. A didactic sequence that approaches the algebraic and graphic solution of 3x3 linear systems was designed, applied and analyzed with the assistance of Winplot educational software. As theoretical reference, the study is based on Raymond Duval's Representation Theory of Semiotics Records (2003) and, as methodology; the study considers the principles of Didactic Engineering, according to Artigue (1996). This research's results indicate the significance of Winplot educational software's use in the contribution to visualize and understand

Keywords: linear system; semiotics representation records; Winplot software.

Introdução

Este artigo contém um recorte do trabalho intitulado “Um estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de sistemas lineares 3x3 no segundo ano do Ensino Médio”, realizado no curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática na Pontifícia

¹ Trabalho apresentado no IV Encontro de Produção Discente em Educação Matemática, realizado em 29 de outubro de 2011.

² Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – barbara@pucsp.br

³ Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – analuciajordao@hotmail.com

Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).

O estudo levou em conta os pré-requisitos que os alunos já possuíam sobre os sistemas lineares 2×2 e, a partir daí, estendeu-se aos sistemas lineares 3×3 , conteúdo programático do 2º ano do Ensino Médio.

Na abordagem dos sistemas lineares, já surgiram algumas dificuldades quanto à resolução e compreensão de sistemas de maiores dimensões. Como, então, trabalhar tais conceitos com os alunos, de modo a reduzir suas dificuldades?

Uma investigação feita por Battaglioli (2008) sobre esse tema ressalta a importância de se explorar o registro gráfico na resolução dos sistemas lineares, uma vez que tal procedimento poderá contribuir para que os alunos tenham maior facilidade, não só para entender o conjunto solução de um sistema linear, mas também para classificá-lo e discuti-lo quando necessário. Explorar o registro gráfico com todas as suas implicações, foi um dos motivos pelos quais se iniciou a pesquisa que, pouco a pouco, foi dando forma e corpo a este trabalho.

Uma vasta bibliografia foi consultada nos estudos preliminares, por meio de leitura de artigos, pesquisas, teses, livros didáticos e documentos oficiais. Entretanto, são os livros didáticos as ferramentas mais acessíveis aos professores no seu trabalho em sala de aula e a análise de dois deles deu suporte à pesquisadora para compor a sequência didática. A fim de verificar como os autores abordavam o assunto sobre os sistemas lineares 3×3 , recorreu-se, portanto, à leitura de dois livros didáticos: *Matemática, Contexto e Aplicações*, volume 2, de Luiz Roberto Dante (2008); e *Matemática – Ensino Médio*, de Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz, volume 2, (2005).

No primeiro livro, o tratamento dado à resolução dos sistemas lineares foi o do escalonamento, enquanto o outro fez uso do método da adição. Em ambos os livros, os gráficos já se mostram resolvidos e não há proposta de realização de novos exercícios que levem os alunos a se sentir instigados na busca e aquisição desta nova aprendizagem.

Foi a partir dessa análise que surgiu o desafio de realizar uma pesquisa qualitativa que contribuísse para o estudo dos sistemas lineares e que respondesse à questão: “Os alunos do Ensino Médio conseguem compreender a resolução dos sistemas

lineares 3×3 , quando de uma abordagem que favorece a conversão e o tratamento de registro de representação aliados a um ambiente computacional?”

A proposta do trabalho consistiu na resolução algébrica do sistema linear 3×3 pelo método de adição e sua resolução gráfica efetuada com o auxílio do *software* Winplot.

A discussão de um sistema linear refere-se à determinação de sua resolubilidade, indicando os tipos de soluções possíveis e, a partir daí, a apresentação de um conjunto solução. A determinação do conjunto solução de um sistema linear nem sempre é facilmente elaborada e compreendida. Neste estudo, foi proposta a utilização de uma ferramenta computacional que permitisse ao aluno compreender com mais clareza a solução encontrada. O uso dessa ferramenta pode levar o aluno à aquisição e domínio do saber, dando significado ao objeto matemático, oferecer-lhe diferentes representações inerentes a esse objeto, expandir o conhecimento dos diferentes saberes, relacionando-os entre si e visualizar os planos em 3D em diferentes posições.

1. Referencial Teórico

O referencial teórico que norteou o desenvolvimento da pesquisa baseou-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica segundo Raymond Duval (2003), que enfatiza a importância da diversidade de registros e a articulação entre eles nas atividades matemáticas. As representações semióticas passam por dois tipos de transformações que são diferentes: os Tratamentos e as Conversões. Os objetos matemáticos só são acessíveis pela sua representação semiótica e cabe ao professor propor as conversões.

Duval (2003) define tratamento como a transformação de representação em outra representação, permanecendo no mesmo sistema, ou seja, uma transformação estritamente interna de um registro. O autor define conversões como transformações de representações que consistem em mudar de registro, conservando os mesmos objetos.

Segundo Duval (2003), para se analisar a atividade de conversão, é suficiente comparar a representação no registro de partida com a representação terminal no registro de chegada.

Para o autor, a compreensão e a originalidade da atividade matemática supõe a coordenação de, ao menos, dois registros de representação semiótica.

Em relação ao tema do trabalho, sistemas lineares, usa-se o *tratamento* ao se propor a resolução de um problema por meio de um sistema linear, sistema esse que pode ser resolvido, qualquer que seja o método empregado (adição, substituição, comparação), obtendo-se sempre o mesmo resultado. Usam-se as *conversões* conforme mostramos a seguir:

- do registro da língua natural para o registro algébrico;
- do registro algébrico para registro de tabelas e registro gráfico;
- do registro algébrico para o registro gráfico;
- do registro gráfico para o registro algébrico.

2. Metodologia

A pesquisa tem por objetivo analisar as situações didáticas da matemática relacionadas à parte experimental em sala de aula, visando entender as relações entre a investigação e a ação do sistema de ensino e baseia-se, como referencial teórico, nos pressupostos da Engenharia Didática segundo Artigue (1996). Essa metodologia compreende as seguintes fases: análises prévias ou preliminares; concepção e análise *a priori* das situações didáticas; experimentação; análise *a posteriori* e validação.

As análises preliminares têm embasamento no quadro teórico didático geral e nos conhecimentos didáticos já abordados, quando da escolha e levantamento de dados sobre o assunto a ser estudado. Nessa fase, foram consultados documentos oficiais, a fim de se obterem orientações quanto à abordagem do estudo dos sistemas lineares. Em relação às pesquisas, baseamo-nos no estudo desenvolvido por Battaglioli (2008), que realizou uma pesquisa investigativa em torno dos livros didáticos do Ensino Médio, analisando a forma de abordagem do registro algébrico e gráfico por eles utilizada na resolução dos sistemas lineares. Os resultados obtidos mostram que o registro gráfico e o registro de representação semiótica da língua natural estão presentes em dois dos três livros analisados, porém, o registro gráfico aparece apenas em textos explicativos, sendo muito pouco explorado nos exercícios resolvidos ou propostos. Battaglioli (2008) ressalta que o professor deve buscar atividades que contemplem essa carência dos livros didáticos, a fim de que os alunos tenham maior facilidade, não só para entender o seu

conjunto solução, mas também para classificá-lo e discuti-lo, quando necessário.

Recorreu-se a Freitas (1999) que, em sua pesquisa intitulada “Resolução de sistemas lineares parametrizados e seu significado para o aluno”, objetivou diagnosticar o sentido atribuído pelos alunos às soluções dos sistemas parametrizados, mediante questões que estabeleçam estabelecessem a relação entre a solução de um dado sistema de no máximo três incógnitas e sua representação gráfica.

A leitura de artigos e a análise de dois livros didáticos do Ensino Médio deram embasamento à pesquisa aqui relatada, justificando a escolha do método de adição para a resolução dos sistemas lineares 3×3 , aliados ao uso de uma ferramenta computacional denominada *software* Winplot.

Na fase de concepção e análise *a priori*, que consiste na elaboração experimental da ação em sala de aula, coube ao aluno o papel de ser o sujeito da pesquisa, e ficou a cargo do professor a retomada das questões discutidas, restabelecendo os principais resultados da teoria. Dentre o universo das teorias existentes, foram feitas escolhas que permitem a análise de como se deu a participação dos alunos em relação ao estudo dos sistemas lineares 3×3 .

Iniciou-se a primeira parte da sequência didática, objetivando fazer a retomada do conteúdo abordado no Ensino Fundamental, sobre sistemas lineares 2×2 . Recorreu-se ao *software* Winplot, a fim de fazer com que o aluno se familiarizasse com essa nova ferramenta computacional, instrumento importante do trabalho a ser realizado dali em diante. Na segunda parte, desenvolveu-se a resolução algébrica dos sistemas lineares 3×3 pelo método de adição.

A *experimentação* é a fase da realização da engenharia com uma determinada população de alunos. Ela se inicia no momento em que se estabelece o contato pesquisador/professor/observador(es) com o grupo de alunos, objeto da investigação. A fim de evitar fracassos da Engenharia Didática nesta fase, é relevante respeitar ao máximo as escolhas feitas nas análises *a priori*.

Na aplicação e análise das sequências, devem-se prever os instrumentos de coleta de dados, organizar e analisar as produções dos alunos, estudar modificações possíveis no estudo proposto, quanto a fundamentos teóricos e metodológicos, analisar os principais resultados em relação à questão de pesquisa e retomar o problema, com síntese das conclusões e avaliação das limitações de pesquisa.

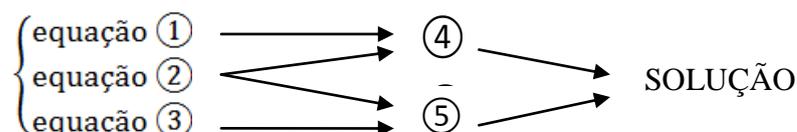
No ano em que a pesquisa foi realizada, a abordagem do estudo dos sistemas lineares no 2º ano do Ensino Médio, foi feita por meio da aplicação da sequência didática. Apresentou-se um cronograma das aulas, a fim de garantir o planejamento escolar. Foram utilizadas 8 aulas de 50 minutos cada uma, para o desenvolvimento das etapas do trabalho, da seguinte forma: duas aulas em classe para a resolução algébrica e uma no laboratório de informática, para a realização da resolução dos sistemas lineares 2x2. Quanto aos sistemas lineares 3x3, foram utilizadas três aulas para a resolução algébrica e duas para a resolução gráfica.

Participaram da realização da sequência didática 45 alunos, divididos em duas turmas: turma A, com 20 e turma B, com 25 alunos. Foram escolhidos 7 alunos como os sujeitos da pesquisa, uma vez que participaram de todo o experimento, de acordo com os critérios combinados: não faltar às aulas e apresentar seus trabalhos registrados individualmente. Desta forma, garantiram-se as análises de todo o experimento em sua íntegra, tanto das atividades realizadas em sala de aula como das realizadas no laboratório de informática.

A parte da atividade em sala de aula, para a realização algébrica dos sistemas lineares 2x2 e 3x3, foi feita individualmente e entregue para a professora/pesquisadora para futuras análises e comentários.

Por ser a primeira vez que os alunos entraram em contato com a resolução do sistema linear 3x3, a pesquisadora explicou-lhes que o tratamento algébrico seria feito de forma semelhante ao do sistema linear 2x2, além de ressaltar a existência de outros métodos usados para a resolução do sistema linear 3x3.

Constatou-se que os alunos não tiveram dificuldade na conversão do registro da língua oral para o algébrico. Entretanto, não realizaram a contento o tratamento algébrico. A pesquisadora sentiu, então, a necessidade de intervir, apresentando resumidamente um esquema de como trabalhar com as três equações, utilizando o método de adição.



Para o trabalho no laboratório de informática, foi elaborado um roteiro com instruções para o uso do *software* Winplot, com as ferramentas necessárias para a representação, no registro gráfico, do sistema linear formado por três equações e três

incógnitas em 3D.

A análise *a posteriori* e a validação foram feitas sobre o conjunto de resultados obtidos a partir da exploração dos dados recolhidos durante a experimentação e que contribuíram para o aprendizado. A análise, apoiada no conjunto de dados assim obtidos, foi o momento de colocar em funcionamento todo o saber construído, corrigindo-o quando as análises do desenvolvimento experimental identificaram tal necessidade. Nessa fase, o desenvolvimento da pesquisa, foi devidamente gravado em áudio e protocolado, para possibilitar a retomada das discussões e para compararmos os dados coletados com a análise *a priori*.

3. Método de Escalonamento e Método de Adição

Quanto ao método a ser usado para a resolução de sistemas lineares 3x3, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2008) sugerem o uso do método de escalonamento, por apresentar operações elementares, bem como a discussão de suas soluções. Vale rever a descrição de um método básico de resolver um sistema linear, a fim de justificar o uso do método de adição para a resolução dos sistemas lineares.

O método básico de resolver um sistema linear consiste em efetuar operações algébricas apropriadas nas equações do sistema para produzir uma sucessão de sistemas cada vez mais simplificados, mas com o mesmo conjunto solução do sistema original, até chegar num ponto em que fica visível se o sistema é consistente e, se for, quais são suas soluções. (ANTON e BUSBY, 2006 apud BISOGNIN; CURY, 2009, p.7)

Bisognin e Cury (2009) ressaltam que a tônica dos processos de resolução está nas operações elementares da resolução dos sistemas lineares abordados no Ensino Fundamental, tanto quanto no Ensino Superior. A pesquisa das duas autoras, revela a preferência dos alunos pelo uso do método de adição.

Na prática em sala de aula, ao abordar a resolução do sistema linear 3x3, percebe-se que os alunos apresentam dificuldade ao aplicar o método de escalonamento: ao multiplicarem a primeira equação por um número pertencente ao conjunto \mathbb{R}^* , adicionando a seguir o resultado com a segunda ou terceira equação, os alunos erram nos cálculos.

Apesar das Orientações Curriculares para o ensino médio (2008) sugerirem o método de escalonamento para a resolução dos sistemas lineares, por apresentar as operações elementares, verifica-se que o método de adição também responde a essa característica.

Em Callioli (1983), constata-se a semelhança de resolução dos sistemas lineares 3×3 , tanto pelo método de escalonamento quanto pelo método de adição, pois ambos têm como objetivo transformar as equações de um sistema linear em outro semelhante.

4. O *Software* Educacional Winplot

O *software* educacional Winplot é um programa gráfico que permite a construção e animação de gráficos em duas dimensões 2D e em três dimensões 3D, por meio de tipos distintos de equações (explícitas, implícitas, paramétricas e outras). Foi desenvolvido pelo professor *Richard Parris “Rick”*, por volta de 1985.

A fim de contribuir para as práticas docentes inovadoras e incentivar posturas conscientes e críticas em relação à seleção de *softwares* educacionais, Batista (2004) desenvolveu um repositório (*SoftMat*), contendo um conjunto desses *softwares* desenvolvidos para Matemática do Ensino Médio, acompanhados de suas respectivas avaliações de qualidade. Dentre estes, consta o Winplot. Essas avaliações sobre os *softwares* foram realizadas por professores e licenciados em Matemática, utilizando uma metodologia de avaliação de qualidade de *softwares* educacionais. A avaliação do *software* Winplot foi realizada na Universidade Estadual do Norte Fluminense, durante um curso de extensão. Segundo Batista (2004), o Winplot foi considerado como sendo bastante coerente com as propostas dos PNLEM (2005), contribuindo para a construção do conhecimento e permitindo estabelecer conjecturas a partir da visualização da movimentação dos gráficos, aspecto fundamental para o desenvolvimento da resolução da sequência didática proposta nesta pesquisa.

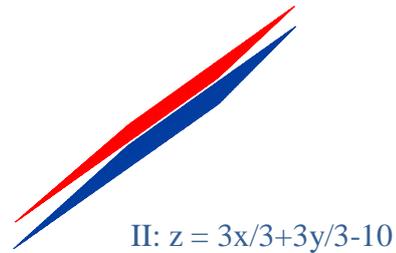
Outro fator preponderante na escolha do *software* Winplot, apontado pela autora, é a possibilidade de se construir o gráfico em três dimensões 3D, condição fundamental, já que o conteúdo matemático trabalhado reporta a três planos no espaço. Há outros fatores significativos que levaram à escolha do *software* Winplot, a saber: ser de fácil manuseio, ocupar pouca memória no computador, possibilitar movimento dos planos e ser um programa de domínio público.

Para exemplificarmos a realização do tratamento algébrico no método de adição e a resolução gráfica com auxílio do *software* Winplot, foi escolhido um sistema possível indeterminado:

$$\begin{cases} x + y - z = 6 & \textcircled{1} \\ 3x + 3y - 3z = 10 & \textcircled{2} \\ 2x + 2y - z = 1 & \textcircled{3} \end{cases}$$

Equações: (1) e (2) $\begin{cases} -3x - 3y + 3z = -18 \\ 3x + 3y - 3z = 10 \end{cases} +$

$$\frac{\quad}{0x + 0y + 0z = -8} \quad (4)$$

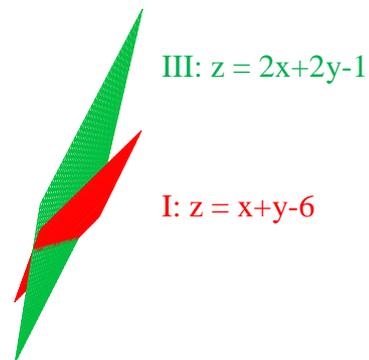


Os alunos, ao realizarem o tratamento algébrico, deveriam encontrar a equação $\textcircled{4}$ e, nesse momento, concluiriam que o sistema seria impossível. Porém, acredita-se ser relevante que os alunos conheçam qual é a posição relativa dos três planos.

Os alunos deveriam prosseguir o tratamento algébrico do sistema linear, a fim de verificarem o que ocorre ao resolverem o sistema linear formado pelas equações $\textcircled{1}$ e $\textcircled{3}$ e, conseqüentemente, conhecerem a posição relativa desses dois planos.

Equações: (1) e (3) $\begin{cases} -2x - 2y + 2z = 12 \\ 2x + 2y - z = 1 \end{cases} +$

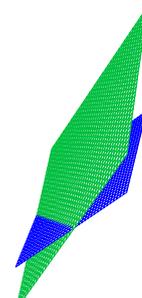
$$\frac{\quad}{0x + 0y + 0z = 1} \\ z - 13 = 0 \quad (5)$$



Os alunos, ao realizarem o tratamento algébrico do sistema linear formado pelas equações $\textcircled{1}$ e $\textcircled{3}$, encontrariam uma equação. Isso poderia levá-los a perceber que esses planos se interceptariam segundo uma reta. Os alunos deveriam resolver o sistema constituído pelas equações $\textcircled{2}$ e $\textcircled{3}$.

III: $z = 2x + 2y - 1$

II: $z = 3x/3 + 3y/3 - 10$



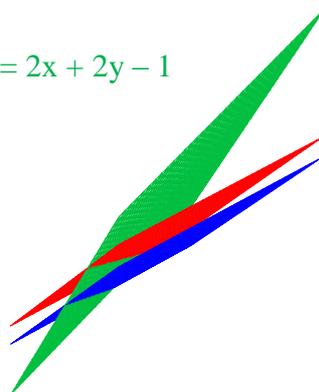
Assim, ao encontrarem as equações: $z - 13 = 0$ $\textcircled{5}$ e $z + 11 = 0$ $\textcircled{6}$, os alunos deveriam interpretar que, se as retas são paralelas, os planos I e II são paralelos, enquanto o plano 3 os intercepta segundo retas paralelas.

Equações: (4) e (5)
$$\begin{cases} 0x + 0y + 0z = -8 \\ \hline z = -8 \\ z = -16 \end{cases} +$$

Equações: (5) e (6)
$$\begin{cases} z + 8 = 0 \\ -z - 11 = 0 \\ \hline 0z - 3 = 0 \\ 0z = 3 \end{cases} + \quad S = \emptyset$$

Com ajuda do *software* Winplot, os alunos visualizariam que os planos se encontram dois a dois, não havendo ponto comum que pertença aos três. Dessa forma, o sistema linear é impossível.

III: $z = 2x + 2y - 1$



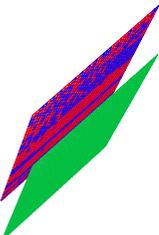
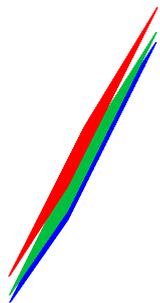
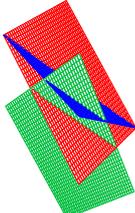
II: $z = 3x/3 + 3y/3 - 10$

Considerações Finais

A proposta deste artigo é apresentar a análise feita durante a realização da sequência didática em que foram explorados os registros de representação semiótica, quanto ao tratamento e conversão de registros, na abordagem do estudo dos sistemas lineares 3×3 . Comentaremos, em nossa análise, as atividades que contemplam os sistemas lineares impossíveis. Convém ressaltar que existem oito diferentes posições relativas dos três planos no espaço e aqui apresentaremos quatro delas.

Os alunos resolvem os sistemas lineares de forma mecânica, sem dar sentido a eles. Propusemos uma sequência, por meio de atividades e situações-problema, propiciando o uso de pelo menos dois registros de representação semiótica, a fim de contribuir para a construção do aprendizado. Convém ressaltar aqui a relevância de interpretar e compreender a solução dos sistemas lineares. Para tanto, foi utilizado o *software* Winplot, que possibilitou ao aluno visualizar, compreender e interpretar a solução do sistema linear 3×3 e estabelecer relações entre os coeficientes das equações no sistema linear 2×2 . O tratamento algébrico do sistema linear 3×3 foi desenvolvido pelo método de adição. Constatamos que os alunos realizaram a conversão do registro da língua

natural para o algébrico. Mostraram dificuldade na realização do tratamento pelo método de adição, no que se refere às operações elementares. Entretanto, observou-se que este método foi o facilitador na interpretação das posições relativas dos planos no espaço.

Sistema Impossível			
2 planos coincidentes e o terceiro paralelo a eles	3 planos paralelos	2 planos paralelos interceptados pelo terceiro segundo duas retas paralelas	3 planos que se interceptam, 2 a 2, segundo retas paralelas
			

Quadro 1. Planos construídos com auxílio do *software* Winplot

Tendo em vista todo o processo utilizado no desenvolvimento desta pesquisa, verificou-se que os alunos transferem os conhecimentos adquiridos no estudo dos sistemas lineares 2×2 para a resolução dos sistemas lineares 3×3 . Constatou-se este fato, quando da interpretação da solução do sistema linear, ao se obterem duas equações do tipo $0x + 0y + 0z = 0$ e $0x + 0y + 0z = a$, em que a pertence a \mathbb{R} . O aluno apresenta dúvida quanto à classificação do sistema linear, se é impossível ou possível indeterminado, não percebendo que a solução do sistema está aliada à intersecção dos três planos no espaço. Essa dúvida só foi esclarecida ao utilizar o *software* Winplot, classificando o sistema linear como impossível. (Quadro 1-A).

Outro momento diz respeito à situação em que o aluno obtém, duas a duas, equações do tipo $0x + 0y + 0z = a$, em que $a \in \mathbb{R}$. Embora as classifique corretamente como sistema impossível, somente com o uso do *software* Winplot, conclui que são três planos paralelos. (Quadro 1-B)

O aluno, ao combinar duas equações do sistema linear 3×3 e ao encontrar o valor de uma das incógnitas, $x = a$ ou $y = b$ ou $z = c$, onde a, b, c pertencem a \mathbb{R} , classifica-o como sistema possível determinado, pois traz o conhecimento adquirido no estudo do sistema linear 2×2 e faz, antecipadamente e erroneamente, essa classificação. O software Winplot contribui para que o aluno compreenda que essas equações representam uma reta e, portanto, dois planos são paralelos e o terceiro os intercepta, segundo duas retas paralelas. (Quadro 1-C)

Mesmo que o *software* Winplot apresente a ferramenta que possibilita a movimentação dos planos, os alunos mostraram dificuldade na visualização dos três planos que se interceptam dois a dois, segundo retas paralelas umas às outras.

Eles obtêm a visualização parcial de dois planos, não integrando sua intersecção com o terceiro, desta forma classificam corretamente como sistema impossível, mesmo não visualizando a situação correta. (Quadro 1-D)

Feitas estas considerações, espera-se contribuir para que os alunos do Ensino Médio possam compreender a resolução dos sistemas lineares, quando de uma abordagem que favorece a conversão e o tratamento de registros de representação aliados a um ambiente computacional. Observou-se no decorrer da aplicação da sequência didática que, na resolução dos sistemas lineares 3×3 , é relevante o uso do tratamento algébrico e gráfico concomitantemente, para melhor compreensão e aprendizagem, por parte dos alunos, deste tipo de sistemas lineares.

Referências

ANTON, H.; BUSBY, R. C. (2006). *Álgebra Linear Contemporânea*. Porto Alegre: Bookman.

ARTIGUE, M. (1996). *Engenharia Didática*. In: BRUN, J. *Didática das Matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

BATISTA, S. C. F. (2004). *Softmat: Um repositório de softwares para matemática do Ensino Médio – Um instrumento em prol de posturas mais conscientes na seleção de softwares educacionais*. Tese de Mestrado. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. UENF

BATTAGLIOLI, C. S. M. (2008). *Sistemas Lineares na segunda série do Ensino Médio: Um olhar sobre os livros didáticos*. Tese de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Pontifícia Universidade de São Paulo PUCSP, São Paulo.

BISOGNIN, E.; CURY, H. N. (2009). *Análise de Soluções de um Problema*

- Representado por um Sistema de Equações*. BOLEMA, Rio Claro.
- BRASIL. SECRETARIA DA EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA. (2005) *Programa Nacional dos Livros Didáticos para o Ensino Médio: Matemática (PNLEM)*. Brasília. MEC.
- BRASIL. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA. (2008) *Orientações curriculares para o ensino médio: Matemática e suas tecnologias*, Secretaria de Educação Básica, Brasília.
- CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. (1983). *Álgebra linear e aplicações*. São Paulo: Atual.
- DUVAL, R. (2003). *Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática*. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). *Aprendizagem em Matemática, Registros de Representações Semióticas*. Campinas: Papirus. (Coleção Papirus Educação), 11-33.
- FREITAS, I. M. (1999) *Resolução de Sistemas Lineares Parametrizados e seu Significado para o Aluno*. Tese de Mestrado. Pontifícia Universidade de São Paulo PUCSP, São Paulo.
- JORDÃO, A. L. I. (2011). *Um Estudo sobre resolução algébrica e gráfica de Sistema Lineares 3x3 no 2º ano do Ensino Médio*. Tese de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Pontifícia Universidade de São Paulo PUCSP, São Paulo.