O Uso da Programação Linear na Otimização da Produção: um Aplicativo para a Microeconomia

*Otto Nogami**

Resumo

A área de otimização possui um considerável número de aplicações dentro da teoria microeconômica, que se caracterizam por diferentes abordagens em termos da natureza dos modelos e das técnicas de resolução utilizadas. É nesse sentido que este artigo foi desenvolvido, cujo objetivo maior é o de mostrar o emprego de métodos de programação linear na resolução de problemas industriais.

Palavras-chave

Otimização, programação linear, produção.

Introdução

Muito se tem falado a respeito, mas pouco se explica sobre a importância desta importante ferramenta no

* Otto Nogami é economista pela FEA/USP, doutorando em Engenharia de Produção pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo e professor da Faculdade São Luís, responsável pela cadeira de Macroeconomia.

tratamento dos modelos econômicos relacionados à teoria da produção. Sempre discutimos questões que envolvem decisões ótimas da empresa analisadas sob a ótica da demanda, produção, custo, produção para a maximização do lucro, e que dependem basicamente de um conjunto de cálculos matemáticos. Mas nos esquecemos que podemos analisar todas estas questões, utilizando-se de um instrumento matemático denominado programação linear.

A programação linear é uma ferramenta matemática para a tomada de decisões para a otimização de problemas com funções lineares, denominadas funções objetivo, levando-se em conta equações restritivas, também lineares. Trata-se, portanto, de problemas de máximo ou mínimo condicionado, que permitem um melhor uso dos recursos escassos.

Dada a linearidade das funções, não podemos aplicar o artifício dos multiplicadores de Lagrange, e daí surgiram outros métodos para resolver tais problemas. Dentre esses métodos, destaca-se o Simplex, desenvolvido por Dantzig, nos Estados Unidos, logo depois da Segunda Guerra Mundial (apesar dos estudos desenvolvidos por Kantorovich no final da década de 1930, mas não divulgados no Ocidente).

A aplicação da programação linear em uma empresa permite resolver vários tipos de problemas, tais como os relacionados com a programação da produção, otimização da distribuição, programação de estoques e armazenagem, alocação de recursos, distribuição de investimentos, dentre muitos outros desafios. Assim, a programação linear tem sido utilizada na busca de soluções para os problemas de otimização nas mais diferentes atividades, como em indústrias, bancos, empresas de transporte, petrolíferas, empresas de geração e distribuição de energia elétrica etc., contribuindo para a obtenção de significativas economias.

Segundo comentários de pesquisadores do Departamento de Computação do Imperial College de Londres, uma pesquisa realizada junto às empresas listadas na Fortune 500, 85% das empresas que responderam à pesquisa afirmaram que utilizam a programação linear como uma ferramenta para tomada de decisões, e também foi identificado que a Programação Linear é uma das três ferramentas matemáticas mais utilizadas (as outras duas ferramentas são os modelos de regressão e a *vertex-edge graphs*).

1. Relação entre a programação linear e outras técnicas de cálculo

Na discussão que envolve tomada de decisão, por meio da utilização do ferramental matemático disponível, destaca-se a utilidade da programação linear, cuja aplicação tem suas características próprias, e apresenta-se como uma ferramenta de solução onde os outros métodos matemáticos não são aplicáveis. Por exemplo, a programação linear somente pode ser utilizada quando as funções relevantes ou as relações envolvidas forem lineares.

No campo da microeconomia, esta restrição se aplica às funções de custos, receitas e lucro total, que podem ser representadas como linhas retas, pois apenas uma variável independente pode ser objeto de análise. Se tivermos mais que uma variável independente, nenhuma variável *(X_i)* pode ter uma representatividade maior que uma única variável, ou ser multiplicada com outra variável. Assim, todas as funções devem ter a seguinte forma:

$$Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n$$

onde a_i representam constantes. Para a utilização da técnica de programação linear tem-se por hipótese retornos constantes de escala, produtividade marginal constante do fator de produção (se nós estivermos utilizando uma função de custo de curto prazo), preços constantes dos fatores de produção, e preços constantes de venda.

Cabe ressaltar que estas hipóteses não são necessárias na aplicação de outros métodos matemáticos, mesmo porque muitas das funções que nós utilizamos na teoria da produção e na teoria de custos não são lineares, sobretudo quando se verificam grandes variações nos níveis de produção. Entretanto, quando ocorrem pequenas variações no nível de produção, a hipótese de linearidade pode se tornar uma realidade.

Por outro lado, a programação linear pode ser utilizada em situações em que certas restrições ou limitações enfrentadas pela empresa possam ser expressas em termos de diferenças, enquanto as técnicas tradicionais de cálculo podem ser utilizadas somente quando essas restrições possam ser expressas como igualdades exatas. Desta forma, por exemplo, fica fácil enxergar a utilidade da programação linear em uma situação em que a empresa possui certa capacidade limitada de produção, em que não utilizará nenhum fator de produção em particular ou várias quantidades de fatores de produção até o máximo disponível. Ou então, a empresa pode desejar maximizar o seu lucro de curto prazo, sujeitando-se a alguns requisitos mínimos de venda no mercado, bem como, alternativamente, pode desejar minimizar ao máximo o custo de produção de um produto, atendendo um conjunto mínimo de requisitos de qualidade e segurança.

O uso da programação linear, e por conseqüência o seu cálculo, por parte de uma empresa, pode apresentar soluções com valores fracionados, e, nestes casos, o tomador de decisão terá que arredondar o resultado obtido. Por outro lado, em situações em que não temos certezas com relação a uma hipótese, recomenda-se a utilização da programação integral.

2. O programa *primal*

Cada programa de programação linear apresenta duas alternativas de análise: o programa *primal* e o programa *dual*. O programa *primal* estabelece explicitamente os objetivos da empresa e suas restrições, e é facilmente compreensível. Por esta razão, começaremos este artigo com um exemplo do programa *primal* de maximização, deixando a discussão do programa *dual* para outra oportunidade.

2.1. Maximização do lucro e a restrição de fatores de produção

Freqüentemente, uma empresa deseja maximizar o seu lucro, mas ela esbarra no problema das quantidades limitadas de certos fatores de produção. Por exemplo, vamos supor uma empresa que produza dois produtos (B_1 e B_2). No curto prazo, a empresa possui duas limitações, que se referem à quantidade de mão-de-obra disponível (400 homens/hora) e equipamentos (máximo de 600 horas).

O produto B_1 utiliza 2 unidades de mão-de-obra por hora e 0,4 horas de equipamentos, proporcionando à empresa um lucro de $0,90 por unidade produzida e vendida, enquanto que o produto B_2 utiliza 3,5 unidades de mão-de-obra por hora e 0,35 horas de equipamentos, permitindo à empresa obter um lucro de $1,00 por unidade produzida e vendida. Estas relações estão sumarizadas na tabela apresentada a seguir.

Tabela 2.1. Fatores de produção necessários para a produção dos bens B_1 e B_2

Fator de produção	**Produto B_1**	**Produto B_2**	**Disponibilidade do fator**
Mão-de-obra	2,00	3,50	4.000
Equipamento	0,40	0,35	600
Lucro	0,90	1,00	

Com base nestes dados, pergunta-se: quanto fabricar de B_1 e B_2 para que a empresa possa obter o maior lucro possível?

2.1.2. Estruturando o problema

O objetivo da empresa é maximizar a produção dos produtos B_1 e B_2. Assim:

$$\Pi = a\ Q_1 + b\ Q_2 \qquad (1)$$

onde: Π — representa o lucro total obtido; e
a, b — representam o lucro obtido por unidade produzida e vendida.

Resolvendo a equação (1) para Q_2, temos que:

$$Q_2 = (\Pi\ /\ b) - [(a/b)\ Q_1] \qquad (2)$$

A equação (2) descreve a reta em que o intercepto vertical é determinado pela função de lucro total e o lucro unitário do produto B_2 $(\Pi\ /b)$ e a declividade da curva é a fração negativa de a/b.

Sabendo-se que o lucro total é dado por:

$$\Pi = 0{,}90\ Q_1 + 1{,}00\ Q_2$$

podemos escrever que,

$$Q_2 = \Pi - 0{,}90\ Q_1 \qquad (3)$$

Supondo que o lucro total, Π, seja especificado, a equação (3) define todas as combinações de Q_1 e de Q_2 que resultarão neste nível de lucro. Portanto, a equação (3) pode ser considerada como uma *Equação de Isolucro*.

Por exemplo, se $\Pi = 90$, podemos estabelecer algumas combinações de Q_1 e Q_2 conforme mostrado na tabela abaixo.

Tabela 2.2. Combinações de Q_1 e Q_2 para $\Pi = 90$

Q_1	Q_2
0	90
20	82
40	64
60	46
80	28
100	0

Dessa maneira, podemos colocar em um eixo cartesiano *isolucros* para cada nível de lucro desejado, como, para 60, 90 e 180.

Tabela 2.3. Combinações de Q_1 e Q_2 para $\Pi = 60$, 90 e 180

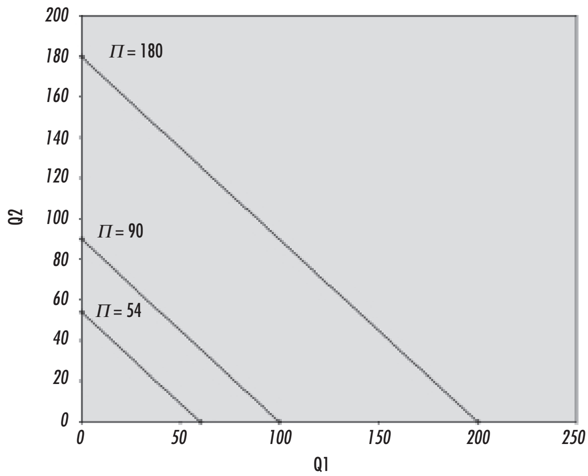
$\Pi = 60$		$\Pi = 90$		$\Pi = 180$	
Q_1	Q_2	Q_1	Q_2	Q_1	Q_2
0	54	0	90	0	180
60	0	100	0	200	0

2.1.3. A solução gráfica

O problema agora é determinar o maior lucro possível, dada a restrição dos fatores de produção da firma. Assim, considerando que a produção do produto B_1 e do produto B_2 requerem dois insumos (mão-de-obra e equipamento), temos:

a) do insumo mão-de-obra serão utilizados duas unidades de mão-de-obra por hora para a produção de B_1 e 3,5 unidades de mão-de-obra por hora para a produção de B_2, limitados, conjuntamente, a

Gráfico 2.1. Curvas de isocusto para Π = 60, 90 e 180



4.000 unidades de mão-de-obra por hora, o que nos permite escrever que:

$$2\ Q_1 + 3{,}5\ Q_2 \leq 4\ 000$$

Esta inequação reflete a disponibilidade limitada do recurso mão-de-obra.

b) na mesma linha de raciocínio, para o insumo equipamento temos que:

$$0{,}4\ Q_1 + 0{,}35\ Q_2 \leq 600$$

e esta inequação mostra a limitação do insumo equipamento na produção combinada de Q_1 e Q_2.

Com base nestes dados, o problema de programação linear está completo, como especificado abaixo:

Maximização: $\Pi = 0{,}90\ Q_1 + 1{,}0\ Q_2$

Que depende de: $2\ Q_1 + 3{,}5\ Q_2 \leq 4\ 000$
(restrição de mão-de-obra)

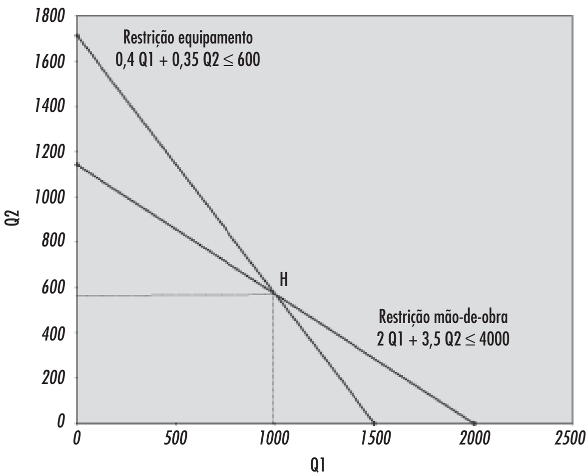
$0{,}4\ Q_1 + 0{,}35\ Q_2 \leq 600$
(restrição de equipamento)

Hipóteses: $Q_1 \geq 0$

$Q_2 \geq 0$

O próximo passo é determinar a produção das quantidades Q_1 e Q_2 sem violar as restrições. Assim, colocando as restrições de mão-de-obra e equipamento em um gráfico, temos o resultado apresentado abaixo.

Gráfico 2.2. Região viável para a produção das quantidades de B_1 e B_2



Desta forma, o problema da programação linear é determinar uma combinação de Q_1 e Q_2 que permita maximizar o lucro, dadas as restrições de fatores de produção. Assim, no gráfico acima, podemos notar que o maior *isolucro* que toca a fronteira de possibilidades de produção é o ponto H.

Observando o gráfico 2.2, podemos notar que, se considerarmos apenas uma das restrições, a empresa poderá produzir qualquer uma das alternativas entre Q_1 e Q_2 e continuar a satisfazer a restrição. Por exemplo, a empresa pode produzir, nos extremos, 1.142,85 quantidades de B_2 e nada de B_1, bem como 2.000 quantidades de B_1 e nada de B_2, sem se afetar pela restrição do fator de produção mão-de-obra.

Entretanto, a empresa tem de levar em consideração todas as restrições existentes para seus fatores de produção e, conseqüentemente, estará habilitada a produzir apenas as combinações entre B_1 e B_2 que estiverem dentro da área hachurada determinada pelas duas curvas de restrição (mão-de-obra e equipamentos), bem como sobre a linha da fronteira de possibilidades de produção. A combinação na produção de B_1 e B_2 nesta área hachurada determinará a *região viável de produção.*

Dadas estas restrições, a empresa poderá produzir qualquer combinação de B_1 e B_2 que estiver na região viável de produção. Entretanto, temos que considerar que a empresa deseja produzir a combinação de B_1 e B_2 que lhe permita maximizar seu lucro (ou minimizar seu prejuízo). Para atingir esta meta, a empresa deverá conhecer a margem de contribuição (preço menos o custo variável médio) por unidade produzida e vendida para cada produto que ela produz. Desta forma temos, em nosso exemplo numérico, que a margem de contribuição de B_1 é de \$0,90 por unidade e de B_2 de \$1,00 por unidade. Com base nesta informação, a empresa pode utilizar a curva de isolucro para, graficamente, determinar a quantidade ótima de B_1 e B_2. A curva de isolucro indica as várias combinações entre dois produtos em que a receita irá proporcionar o lucro desejado para a empresa.

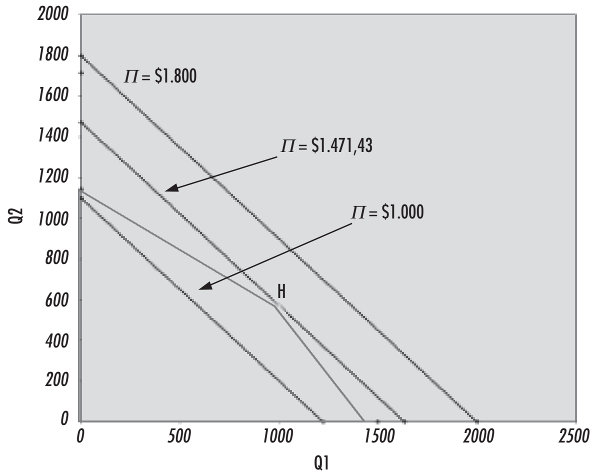
No gráfico 2.3 temos três linhas de isolucro e a região viável do gráfico 2.2. Nós podemos obter a equação para cada linha de isolucro substituindo diferentes valores para a margem de contribuição total *(Π)* na função,

$$\Pi = \$0,90\ Q_1 + \$1,00\ Q_2$$

Esta função especifica que a margem de contribuição total da empresa é igual a \$0,90 vezes a quantidade de B_1 mais \$1,00 vezes a quantidade de B_2 produzida. Substituindo \$1.100 em Π, podemos encontrar a equação que mostra as diferentes combinações de B_1 e B_2 que resultarão em uma margem de contribuição de \$1.100. Derivando a equação para outras curvas de isolucro, façamos os mesmos cálculos para Π = \$1.471,43 e Π = \$1.800.

Se a empresa deseja maximizar o lucro, então ela deverá estar na mais distante curva de isolucro possível, dadas as restrições dos fatores de produção. No gráfico 2.3 podemos notar que a linha de isolucro para Π = 1.471,43 toca o ponto H da região viável de produção; por outro lado, o lucro de total de \$1.471,43 é o maior montante que a empresa pode encontrar, dada a sua capacidade de produção. O ponto H indica, portanto, e também, a contribuição que maximiza o lucro na produção combinada de B_1 e B_2 que a empresa pode produzir nestas condições. Portanto, o ponto H é o ponto ótimo, mesmo que a empresa tenha capacidade ociosa de algum fator de produção.

***Gráfico 2.3. Linhas de isolucro e a* região viável de produção**



2.1.4. O método da solução algébrica

O método gráfico para se obter a melhor combinação na produção para se obter a maximização do lucro pode ser considerado útil a título de ilustração. Nesse sentido, os métodos algébricos são bem mais precisos e práticos, especialmente quando nos defrontamos com um número de variáveis maior que dois, especialmente porque graficamente a análise se torna mais difícil.

Existem vários métodos algébricos para a solução de problemas como o que está sendo objeto de nosso trabalho, e essas soluções são ainda disponíveis por meio dos mais diferentes softwares sobre o assunto. Conseqüentemente, neste trabalho, iremos apresentar apenas o método algébrico mais simples existente.

Como foi visto na seção anterior, a função objetivo de uma empresa é maximizar o seu lucro, ou seja, maximizar

$$\Pi = 0{,}90\ Q_1 + 1{,}00\ Q_2$$

De acordo com as restrições apresentadas abaixo:

Mão-de-obra: $2{,}00\ Q_1 + 3{,}50\ Q_2 \leq 4000$
Equipamento: $0{,}40\ Q_1 + 0{,}35\ Q_2 \leq 600$

Para se resolver o problema algebricamente, vamos criar duas novas variáveis que doravante denominaremos *variáveis de ociosidade*. Cada uma delas representa a capacidade ociosa de cada um dos fatores de produção, e como elas não podem ter capacidade negativa, o valor de cada uma dessas variáveis tem de ser necessariamente igual ou maior que zero. Da mesma forma, os valores de Q_1 e Q_2 devem ser iguais ou maiores que zero.

Desde que cada *variável de ociosidade* representa o excedente de capacidade de produção de algum fator de produção, introduziremos essa variável em cada uma das equações de restrição, que passam a ter a seguinte configuração:

Mão-de-obra: $2{,}00\ Q_1 + 3{,}50\ Q_2 + s_{MOB} \leq 4000$ (4)
Equipamento: $0{,}40\ Q_1 + 0{,}35\ Q_2 + s_{EQP} \leq 600$ (5)

Neste caso, s_{MOB} representa a capacidade ociosa de mão-de-obra e s_{EQP} representa a capacidade ociosa no uso dos equipamentos. A inclusão dessas variáveis de ociosidade transforma essas restrições em igualdades algébricas, porque o montante de um particular tipo de fator de produção utilizado na produção, mais a capacidade ociosa que sobra dela, tem de ser igual à quantidade total disponível desse fator.

Antes de continuarmos, devemos observar que, neste caso, os pontos que determinam o limite (também denominados ***pontos extremos***) da fronteira de possibilidades de produção ocorrem: a) onde duas curvas de restrição se encontram; b) onde a curva de restrição intercepta tanto o eixo das abcissas como o eixo das ordenadas; e c) no ponto de origem. Portanto, em qualquer desses pontos, pelo menos duas das quatro variáveis em questão (Q_1, Q_2, s_{MOB} e s_{EQP} presentes nas equações de restrição) têm de ser igual a zero.

Esta característica também estará presente em casos gerais em que existam m restrições e n variáveis de decisão. Neste caso, o número de variáveis com valor zero tem de ser grande o bastante tal que o número de variáveis zero não seja maior que o número de restrições. Usualmente, se há m restrições, teremos m variáveis que não serão iguais a zero.

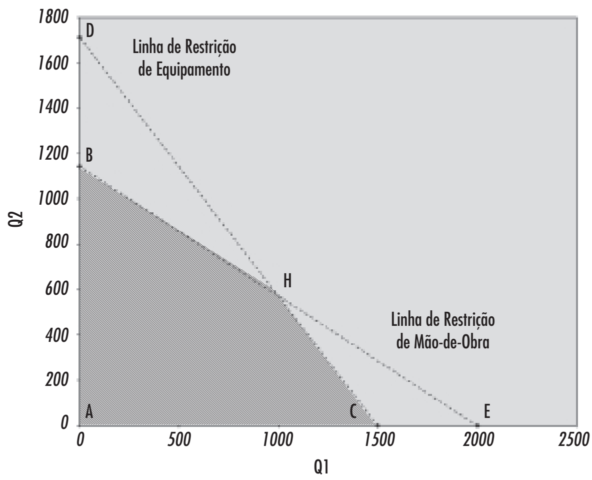
Assim, para se desenhar cada linha de restrição, nós devemos assumir que toda a capacidade disponível dos fatores de produção correspondentes está sendo utilizada. Isto significa dizer que, ao longo da linha de restrição da capacidade de produção, o valor correspondente à ***variável de ociosidade*** é zero. Desta forma, no Gráfico 2.4, no ponto A, Q_1 e Q_2 têm valor zero; no ponto B, Q_1 e s_{MOB} são zero; no ponto H, s_{MOB} e s_{EQP} são zero; e no ponto C, Q_2 e s_{EQP} têm valor nulo.

Observe, também, que nem todos os pontos onde duas variáveis são zero são necessariamente parte da região de possibilidades de produção. Por exemplo, no ponto D, do Gráfico 2.4, Q_1 e s_{EQP} são iguais a zero, mas este ponto D não faz parte da região de possibilidades de produção, porque está fora da fronteira de possibilidades de produção. No ponto E, Q_2 e s_{MOB} também são zero, mas, tal como no exemplo anterior, também estão fora da fronteira de possibilidades de produção.

Além de tudo isso, apenas um ponto na fronteira de possibilidades de produção irá determinar a combinação ideal de B_1 e B_2 que permitirá a obtenção do máximo lucro possível. Entretanto, resolvendo as equações de restrição para Q_1 e Q_2 em cada um dos pontos extremos da fronteira de possibilidades de produção, e determinando o correspondente Π por meio da função objetivo, podemos descobrir a combinação ótima de produção de B_1 e B_2.

Enquanto a contribuição de cada unidade produzida e vendida no lucro for positiva, podemos ignorar o ponto de origem A nesta análise, pois nele $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$ e $\Pi = 0$. No ponto B, Q_1 e s_{MOB} são zero, e

Gráfico 2.4. Linhas de Restrição e a Fronteira de Possibilidades de Produção



substituindo-se estes valores nas identidades (4) e (5), obteremos as seguintes equações:

$$3{,}50\ Q_2 \leq 4000$$
$$0{,}35\ Q_2 + s_{EQP} \leq 600$$

Nestas equações, podemos verificar que Q_2 = 1.142,86. Substituindo este valor na segunda equação, teremos que s_{EQP} = 200. Da nossa função objetivo vamos verificar que estes resultados proporcionarão um Π = 1.142,86. A variável de ociosidade de equipamentos, nestas condições, nos mostra que temos um excedente não aproveitado de 200 horas.

No ponto H, s_{EQP} e s_{MOB} são zero, e substituindo estes valores nas equações (4) e (5) temos:

$$2{,}00\ Q_1 + 3{,}50\ Q_2 \leq 4000$$
$$0{,}40\ Q_1 + 0{,}35\ Q_2 \leq 600$$

Multiplicando a segunda expressão por –10, vem que:

$$
\begin{array}{r}
2{,}00\ Q_1 + 3{,}50\ Q_2 \leq 4000 \\
-4{,}00\ Q_1 - 3{,}50\ Q_2 \leq -6000 \\
\hline
-2{,}00\ Q_1 \qquad\qquad = -2000 \\
Q_1 = 1000
\end{array}
$$

Substituindo-se Q_1 = 1000 em qualquer uma das equações de restrição, encontraremos que Q_2 = 571,43. Agora, substituindo-se estes valores de Q_1 e Q_2 na função objetivo, encontraremos que Π = 1471,43.

No ponto C, Q_2 e s_{EQP} são zero, e de maneira similar ao que fizemos nos outros pontos, iremos determinar que Q_1 = 1500, s_{MOB} = 1000 e Π = 1350.

Tal como nós determinamos graficamente, a combinação ótima na produção dos produtos B_1 e B_2, algebricamente, é dada também pelo ponto H, onde Q_1 = 1000, Q_2 = 571,43 e Π = 1471,43, o mais alto nível de maximização do lucro obtido neste trabalho.

Como nós sabemos que os pontos A, B, H e C determinam a fronteira de possibilidades de produção, ao contrário dos pontos D e E? Antes de determinar os valores das variáveis de ociosidade diferente de zero, a única maneira de se saber é por meio da elaboração do gráfico.

Depois de encontrarmos os valores das variáveis de ociosidade não zero, nós podemos afirmar porque os valores dessas variáveis são positivos. Nos pontos como D e E, o valor de pelo menos uma variável de ociosidade será negativa, significando que pelo menos uma das restrições foi violada. Por exemplo, no ponto D, s_{MOB} = -2000, significando que a restrição do fator mão-de-obra foi violada. Entretanto, sempre é bom utilizar a análise gráfica juntamente com o método algébrico para se encontrar o ponto de maximização do lucro para que possamos localizar, mais facilmente, os pontos da fronteira de possibilidades de produção (enquanto o número de variáveis decisão não for muito extenso).

Agora vamos analisar o programa primal em problemas de minimização de custos.

2.2. Programação linear para solução de problemas de minimização de custos

A programação linear também pode ser útil para certos problemas de decisão de minimização de custos, desde que exista o quesito da linearidade. Na seção anterior, mostramos como se obtém a combinação ótima na produção entre dois bens, de acordo com as restrições existentes nos fatores de produção, com o objetivo de se obter o maior lucro possível. Nesta, apresentaremos a solução para o problema de minimização. Salientamos que a abordagem é análoga à que foi usada no problema de maximização.

O exemplo que iremos utilizar está baseado no modelo desenvolvido por Petersen & Lewis (1999, p.282), que acataram um modelo do setor de *agribusiness*, em que os modelos de programação linear são amplamente utilizados.

2.2.1. Estruturando o problema

Consideremos um bovinocultor de leite, cujo objetivo é alimentar o seu rebanho ao menor custo possível. Suponhamos que uma ração adequada seja composta de 40 unidades de proteína, 60 unidades de cálcio e 60 unidades de carboidrato.

O administrador tem de determinar qual o melhor balanceamento entre duas rações, A e B, a ser utilizado. Uma tonelada da ração A contém uma unidade de proteína, três unidades de cálcio e uma unidade de carboidrato. Uma tonelada da ração B contém uma unidade de proteína, uma unidade de cálcio e seis unidades de carboidrato. O preço da ração A é de $100 por tonelada e o preço da ração B é de $200 por tonelada. Estes dados são apresentados na Tabela 2.4.

Tabela 2.4. Dados para o problema de minimização de custos

Item	**Unidade de nutrientes (tonelada de ração)**		**Mínimo necessário por período (unidades)**
	Ração A	**Ração B**	
Proteína	1	1	40
Cálcio	3	1	60
Carboidrato	1	6	60
Preço por tonelada ($)	100	200	

Com base nestes dados, o objetivo é achar a quantidade das duas rações X_A e X_B (as variáveis decisão), que deverão ser adquiridas de tal forma que o custo da ração possa ser o menor possível. Assim, o problema será o de minimizar a função objetivo,

$$C = 100\ X_A + 200\ X_B$$

sujeita aos requisitos mínimos de quantidade de nutrientes, conforme mostrado abaixo:

Proteína:	$1\ X_A + 1\ X_B \geq 40$
Cálcio:	$3\ X_A + 1\ X_B \geq 60$
Carboidrato:	$1\ X_A + 6\ X_B \geq 60$

E ao requisito usual de que todas as variáveis decisão não sejam negativas, ou seja,

$$X_A \geq 0$$
$$X_B \geq 0$$

2.2.2. Solução gráfica

As linhas de restrição são colocadas em um gráfico, da mesma forma como foi feito no capítulo anterior. Essas restrições e a resultante área de possibilidades é mostrada no Gráfico 2.5. Observe que a área de possibilidades, agora, está acima e à direita das linhas de restrição, contrastando com o que foi mostrado anteriormente, quando a área de possibilidades estava abaixo e à esquerda das linhas de restrição. Isto acontece em função da natureza das restrições dos recursos. Na seção anterior, a restrição de fatores tinha o formato de *menor ou igual a*, que restringiam as combinações das variáveis decisão a um ponto sobre ou dentro da fronteira, quando mostrados graficamente. No presente problema, os recursos escassos têm o formato de *maior ou igual a*, que restringe as possíveis combinações das variáveis decisão a um ponto sobre ou acima das linhas de restrição.

Para encontrar a combinação de ração (X_A e X_B) que atendam os requisitos nutricionais necessários ao menor custo, devemos pensar em termos de deslocamentos paralelos da equação de custo $C = 100\ X_A + 200\ X_B$, a partir do ponto de origem 0, em direção à nordeste, no

Gráfico 2.5. Região de possibilidades e linhas de restrição para problemas de minimização de custos

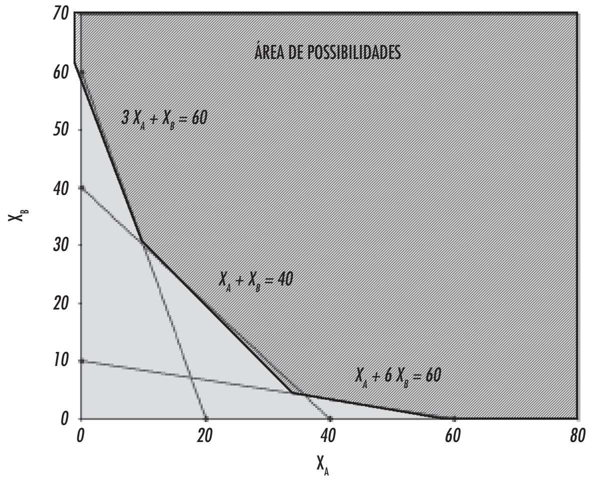
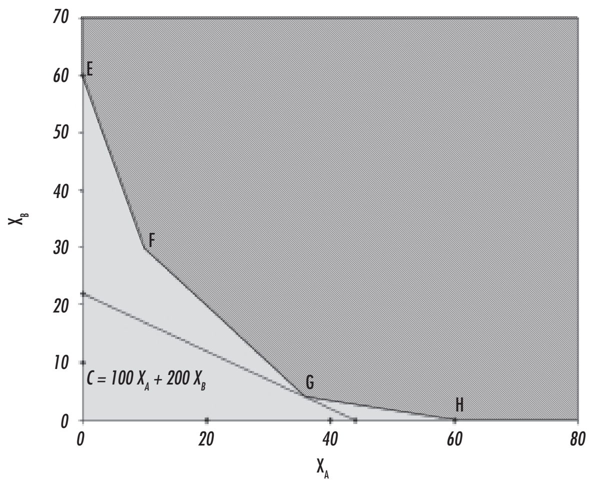


Gráfico 2.6. Resolvendo o problema de minimização de custos



gráfico, até que a função custo encoste em algum ponto na fronteira de mínimo custo. A solução é demonstrada no Gráfico 2.6. A função custo toca primeiro na fronteira no ponto G, que corresponde a 36 toneladas da ração A e 4 toneladas da ração B. Esta é a solução ótima, pois representa o menor custo entre todas as combinações das duas rações que tocam a fronteira. Assim, o custo total das rações será de $4.400 [C = 100 (36) + 200 (4)]; aqui não há nenhuma outra combinação das duas rações (X_A e X_B) que possam satisfazer as restrições e custos menores que $4.400.

2.2.3. Solução algébrica

A solução algébrica é essencial, da mesma forma quando a utilizamos para obter o ponto para maximização do lucro. Primeiro, temos que encontrar os valores de X_A e X_B para cada ponto na linha que representa o menor custo possível (isto é, pontos E, F, G e H), determinado pela intersecção das duas linhas de restrição que passam por cada ponto. Por exemplo, considerando-se o ponto F no Gráfico 2.6, que representa a intersecção das linhas de restrição de proteína e cálcio. Resolvendo algebricamente temos:

$$X_A + X_B = 40$$
$$3 X_A + X_B = 60$$

substituindo a segunda equação da primeira vem que,

$$-2 X_A = -20$$
$$X_A = 10$$

Agora, substituindo este valor na primeira equação, e calculando X_B

$$10 + X_B = 40$$
$$X_B = 30$$

Assim, o ponto F é dado por $X_A = 10$ e $X_B = 30$. Um segundo passo é determinar o custo para esta combinação das rações A e B, substituindo os valores de X_A e X_B na equação de custo. Repetindo este procedimento para os demais pontos E, G e H, iremos obter as combinações de rações necessárias e seus respectivos custos. O resultado obtido é mostrado na Tabela 2.5.

Tabela 2.5. Valores das variáveis decisão e de custos em cada ponto

Ponto	Variável decisão		Custo total
	X_A	X_B	
E	0	60	12000
F	10	30	7000
G	36	4	4400
H	60	0	6000

Conforme podemos observar na tabela acima, o ponto ótimo em que o bovinocultor minimiza seu custo é o ponto G. Assim, o pecuarista deverá utilizar 36 toneladas da ração A e 4 toneladas da ração B. Não existe outra combinação possível que possa satisfazer as restrições a um custo menor que $4.400.

Considerações Finais

Independentemente do objetivo de minimizar ou maximizar a função objetivo, a utilização do método de programação linear é essencialmente o mesmo. Primeiro se utilizam as restrições para determinar a área de possibilidades. Depois, determinamos os valores das variáveis decisão em cada ponto onde as linhas de restrição se cruzam. E, finalmente, com base nos pares de dados, determinamos os valores da função objetivo, e selecionamos a combinação que otimiza (isto é, minimizando ou maximizando) esta função.

Referências Bibliográficas

CHIANG, A. C. (1984). *Fundamental methods of mathematical economics.* 34.ed. New York: McGraw-Hill.

CHILDRESS, R. L. (1989). *Mathematics for managerial decisions.* 2.ed. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

McGUIGAN, J. R., MOYER, R. C. e HARRIS, F. H. (2002). *Managerial economics: applications, strategy, and tactics.* 9.ed. Mason: South-Western.

PETERSEN, H. C. e LEWIS, W. C. (1999). *Managerial economics.* 4.ed. New Jersey: Prentice Hall.

SILBERBERG, E. (1990). *The structure of economic analysis. 2*.ed. New York: McGraw-Hill.

TAKAYAMA, A. (1985). *Mathematical economics.* 2.ed. Hinsdale: Dryden Press.