Fractais: Obras de Arte Geradas por Equações Matemáticas

Prof. José Luiz U. de Petta*

Profa. Júlia Harue S. de Petta**

Resumo

O atual interesse pelo estudo dos fractais é muito mais que uma nova teoria no campo das ciências exatas. Além de belos efeitos visuais, há, por trás dessa beleza, uma profunda matemática. Desde os primeiros artigos de Pierre Fatou e Gaston Julia, somente com o advento da computação gráfica, através dos estudos de Benoit Mandelbrot, tornou-se possível visualizar graficamente o que acontece quando um computador é alimentado com equações matemáticas.

Palavras-chaves

Processo Iterativo, Atrator, Caos e Órbita.

---

* Prof. José Luiz U. de Petta é engenheiro mecânico, pós-graduado em Matemática Educacional e professor titular da cadeira de Matemática I da Faculdade São Luís.

** Profa. Júlia Harue S. de Petta é licenciada em matemática, mestranda em Tecnologias Aplicadas à Educação na UNIBAN e professora de Estatística na UNIBAN e UNIP.

1. Belos efeitos artísticos, uma matemática profunda, isto é um fractal

O corrente fascínio por fractais é muito mais que uma simples curiosidade matemática ou um modismo. O grande mérito desta teoria é oferecer um método extremamente compacto para analisar e descrever objetos e formas naturais, contrapondo-se com as limitações da geometria clássica. Seu criador Benoit Mandelbrot, definiu-a como a geometria da natureza.[1]

A geometria dos fractais é uma nova linguagem criada por Benoit Mandelbrot, matemático polonês, funcionário do Centro de Pesquisa Thomas J. Watson, da IBM, em seu livro *The Fractal Geometry of Nature*. Essa geometria foi desenvolvida a partir dos estudos efetuados por Pierre Fatou (1878-1929) e Gaston Julia (1893-1978) que formularam a teoria sobre o que acontece com um número complexo z, quando a este é aplicada *iterativamente*, isto é, repetidamente a transformação $f : C \rightarrow C$ e definida por $f_{(z)} = z^2 + c$, em que c é o parâmetro de controle ajustado arbitrariamente.

Essa nova área das ciências matemáticas vem tendo uma enorme aplicação. Para os biólogos, ajuda a compreender o crescimento das plantas; para os médicos, dá uma nova visão da anatomia interna do corpo; para os meteorologistas, condições de prever as mudanças do tempo com alto grau de confiabilidade. Enfim, não faltam aplicações que envolvam formas intricadas, padrões irregulares e fragmentados. Uma das mais belas aplicações, sem dúvida, a mais colorida, é o uso de fractais na arte. Quando um computador é alimentado com equações específicas, criam-se magníficos desenhos abstratos. No estudo dos números complexos ajudam, entre outras coisas, a apresentação das soluções de equações polinomiais de qualquer grau, como veremos mais adiante.

Fractais são belos e fascinantes padrões de estruturas complexas e formas intrincadas que chamem a atenção pela beleza e provocam um sentimento de deslumbramento infantil.

Longe de serem abstrações esotéricas, os fractais estão muito mais próximo de nós do que imaginamos. De fato, os objetos não-fractais é que são irreais, abstratos e distantes de nossa experiência cotidiana.

1. Maria Cecília Carvalho, *Fractais, uma breve introdução,* p. 7.

Desde o início de nossa educação, formal e informal, aprendemos categorias simplificadas para organizar o mundo.

O movimento das nuvens, a tragetória de uma folha de árvore descendo suavemente a correnteza de um riacho, as violentas e rápidas descargas elétricas de um relâmpago na atmosfera; observe atentamente um pequeno ramo de uma samambaia, veja que a menor folha é réplica de uma outra maior e esta, réplica perfeita de outra maior. Repare que seu broto é idêntico a uma espiral logarítmica e que os brotos menores são réplicas desse.

> *Os fractais envolvem olhar mais de perto, e enxergar mais detalhes. Os fractais têm tudo a ver com saliências que escondem outras saliências, curvas que conduzem a mais curvas, e a átomos que se desdobram em universos. Fractais estão relacionados com a rica estrutura de nosso universo, que comporta todas as escalas, desde as incontáveis galáxias a distâncias inimagináveis, até mesmo as misteriosas vibrações internas do reino sub-atômico.*[2]

Vamos medir o comprimento de uma circunferência. Colocamos um quadrado dentro dessa circunferência e somamos os quatros lados desse quadrado. Esse valor será o comprimento da circunferência em questão.

Mas se quisermos um valor mais correto, devemos ir aumentando o número de lados, isto é, fragmentando o lado do polígono inscrito, diminuindo seu comprimento e, conseqüentemente, os valores das somas encontradas irão aumentando e cada vez mais próximos do comprimento da circunferência.

Esse procedimento correto e intuitivo funciona em situações genéricas que, na maioria das vezes, não possuem uma fórmula específica, como a do círculo, para se calcular o comprimento de uma curva.

A diferença do processo separa as formas da geometria clássica das formas da geometria fractal. Eis, portanto, a nossa primeira definição intuitiva:

> *Se o tamanho estimado de uma curva aumenta, arbitrariamente, à medida que as medições diminuem, esta curva é chamada* ***curva fractal***.[3]

2. Tyler Branderhorst, *The waite group Fractais for Windows*, p. 5.
3. Tyler Branderhorst, *The waite group Fractais for Windows*, p. 5.

2. Comprimento e Dimensão

A complexidade da medição está relacionada com a idéia de dimensão.

As linhas e curvas são unidimensionais ao passo que os planos e superfícies são bidimensionais. O que acontece é que a idéia de "dimensão" pode ser ampliada, de tal forma, que estas curvas incomuns possuem uma dimensão maior do que 1.

Podemos pensar, por exemplo, no litoral de um país como sendo uma curva. Quando medimos seu comprimento, cada vez que diminuímos o tamanho da régua, ele aumenta. Se usarmos o tamanho de uma régua r para medi-lo, ele será igual a $c - r \, . \, n$, sendo o número n o número de vezes que a régua foi usada.

Se diminuirmos o tamanho da régua, o comprimento da costa aumenta.

Dessa forma, cada vez que diminuímos o tamanho da régua, o comprimento tende a aumentar; e como podemos, intuitivamente, diminuir indefinidamente o tamanho da régua, teremos o comprimento da costa tendendo ao infinito:

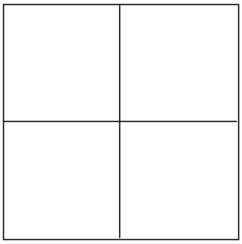
$$\boxed{c = \lim_{r \to o} r \, . \, n}$$

Estamos acostumados a três dimensões, isto é, unidimensional, bidimensional e tridimensional, mas um objeto unidimensional como um segmento de reta:

pode ser dividido em n partes idênticas:

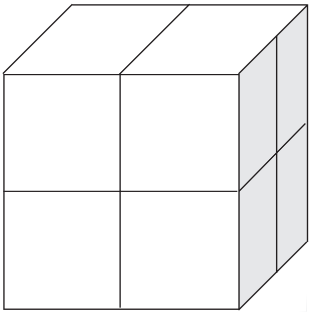
cada uma das quais reduzida pela razão r do todo, ou seja, $r = \dfrac{1}{n}$

Da mesma forma, um quadrado pode ser dividido em n partes auto-similaridades as quais estão reduzidas pela razão r do todo, da seguinte forma:



$r = \frac{1}{\sqrt{n}}$, no exemplo $r = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

Um objeto tridimensional, como um cubo sólido, pode ser dividido em n pequenos cubos cada qual reduzido pela seguinte razão:



$r = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, no exemplo, $r = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$

Desta forma, um objeto auto-similar de dimensão D pode ser dividido em n pequenas réplicas de si próprio, cada uma das quais reduzidas por um fator r da seguinte forma:

$r = \frac{1}{\sqrt[D]{n}}$ podemos escrever: $r \,.\, \sqrt[D]{n} = 1$

Assim, elevando a D membro a membro, teremos: $r^D .\ n = 1$

Para obtermos o valor de D, a partir desta equação exponencial, devemos aplicar o logaritmo decimal, membro a membro, da seguinte maneira:

$$\log(r^D \,.\, n) = \log 1$$

Pelas propriedades de logaritmo, teremos:

$$\log r^D + \log n = \log 1$$

ou seja, $D \,.\, \log r + \log n = 0$

Então, $$D = \frac{-\log n}{\log r} = \frac{\log n}{\log r^{-1}} = \frac{\log n}{\log \frac{1}{r}}$$

Mandelbrot chama D de dimensão fractal da curva, que se diferencia da dimensão euclidiana por não precisar ser, necessariamente, um número inteiro. A magnitude de D é a medida da rugosidade da curva.

A complexidade da medição está relacionada com a idéia de dimensão. O que acontece é que a idéia de dimensão pode ser ampliada, de tal maneira, que estas curvas incomuns possuem uma dimensão *maior* do que 1. Isso nos conduz diretamente a uma definição alternativa de fractal.

A dimensão fractal de um objeto é a medida de seu grau de irregularidade considerado em todas as escalas, podendo assumir um valor maior do que a dimensão geométrica clássica do objeto. A dimensão fractal está relacionada à rapidez com que a medida estimada do objeto aumenta enquanto o instrumento de medição diminui. Uma dimensão fractal maior significa que o fractal é mais irregular, e a medida estimada aumenta mais rapidamente. Para os objetos da geometria clássica (linhas, curvas), a dimensão do objeto e sua dimensão fractal são as mesmas. Um fractal é um objeto que possui uma dimensão fractal maior do que sua dimensão clássica.

3. Fractais Caóticos

Nos Estados Unidos, alguns dos mais possantes supercomputadores rodam modelos matemáticos complexos com o objetivo de aprimorar a previsão do tempo. Mesmo assim, todos sabemos que o sucesso desse esforço é bastante limitado. Mesmo um enorme investimento em equipamentos sofisticados, proporciona a habilidade de prever o comportamento do clima com apenas um breve período de antecedência. O tempo é como o fluxo de uma da água nas corredeiras de um rio. Um computador pessoal é capaz de projetar, com facilidade, a órbita da sonda Voyager muito além do sistema solar, mas o maior supercomputador não consegue prever o curso de uma gota de água nas corredeiras do rio.

O problema é que a dinâmica subjacente às condições de um comportamento de um objeto é de natureza caótica.

Um sistema dinâmico é uma coleção de partes que interagem umas com as outras e se modificam mutuamente, com o passar do tempo. Um sistema dinâmico é considerado ***caótico****, se pequenas modificações nas condições iniciais do sistema produzirem, posteriormente, grandes modificações no mesmo.*[4]

4. Qual a aplicação prática dos fractais?

Para que eles servem?

Inicialmente, as maravilhosas figuras geradas por fórmulas matemáticas constituem um estilo novo de arte.

No ensino da Matemática, os fractais são educativos, porque ilustram muitos conceitos matemáticos básicos como veremos adiante e constituem o veículo ideal para estimular o aprendizado desses conceitos por pessoas com um sentido visual mais aguçado. Ainda que a apreciação de imagens gráficas não substitua a aprendizagem dos fundamentos abstratos da matemática, o fascínio despertado pelas imagens fractais pode estimular um estudante a pesquisar textos de matemática a fim de compreender os conceitos abstratos que possibilitam os efeitos visuais.

Embora raramente pensemos nisso, a vida de uma pessoa, em nossa complexa sociedade, é inteiramente dependente de sistemas dinâmicos, tanto naturais quanto artificiais. Algoritmos de computadores, orientados por equações matemáticas, algumas vezes, revelam-se estáveis para certas entradas numéricas, porém exibem um comportamento caótico em relação a outras. Esse conceito importante é que deve, desde já, ser assimilado, pois certas fórmulas, em certas circunstâncias, saem do eixo e agem de maneira imprevisível.

Como vimos, os fractais estão intimamente ligados ao caos. De fato, muitos fractais, gerados por computador, são criados, precisamen-

4. Tyler Branderhorst, *The waite group, Fractais for Windows*, p. 12.

te, operando-se as regiões que exibem, em algoritmos usualmente comportados, um comportamento caótico.

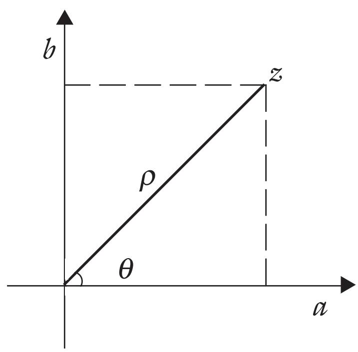
O estudo dos fractais aumenta os nossos conhecimentos sobre o comportamento caótico dos sistemas dinâmicos. Freqüentemente, é capaz de permitir descrever as estruturas de uma folha, do real movimento de uma bola lançada para o ar sob o efeito de diferentes valores do campo gravitacional terrestre e, de maneira geral, tudo aquilo que a geometria euclidiana não consegue estruturar.

5. Números Complexos e o Plano de Argand-Gauss

Para facilitar a compreensão desse assunto, vamos rever, superficialmente, parte da teoria dos números complexos.

O número complexo é de um par ordenado $z = (a\ ;\ b)$, em que a abcissa a é a parte real e a ordenada b é o coeficiente da parte imaginária. A parte imaginária tem como unidade o número i tal que $\boldsymbol{i^2 = -1}$ (propriedade básica), então $\boldsymbol{i = \sqrt{-1}}$.

Pode ser escrito na forma algébrica $z = a + bi$ ou na forma trigonométrica, isto é, $\boldsymbol{z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)}$, em ρ que é chamado de módulo e representa a distância da origem dos eixos ao ponto z, ponto este chamado de afixo do número complexo e, pelo ângulo θ, chamado de argumento do número complexo, representando o ângulo formado pela distância ρ e pelo eixo real.



$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \\ sen\,\theta = \dfrac{b}{\rho} \end{cases}$$

Plano de Argand-Gauss

Devemos lembrar que $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ é a equação da circunferência de centro *(a ; b)* e raio r e desta forma $|z| \leq r$, representa um círculo de centro $c = (0\ ;\ 0)$ e raio r:

De fato:

$$z = a + bi$$

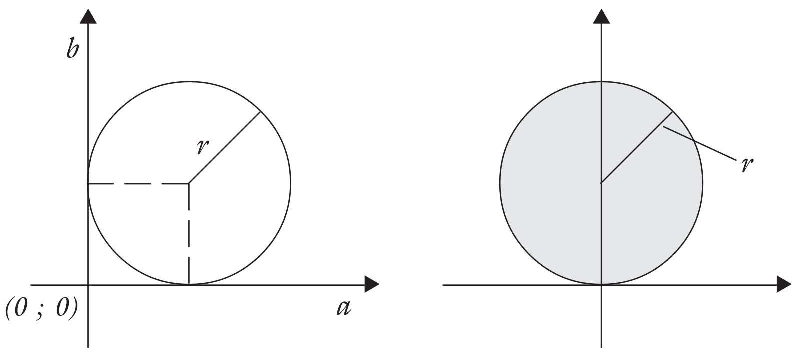
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} \leq r$$

$$a^2 + b^2 \leq r^2$$

representando um círculo de centro *(0 ; 0)* e raio r (veja figura abaixo)

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ $\qquad\qquad$ $a^2 + b^2 \leq r^2$



6. O Conjunto de Mandelbrot

Mas o que há de tão especial nos números complexos?

O conjunto de todos os pontos C do plano complexo, que geraram um conjunto de Julia conexo é chamado de conjunto de Mandelbrot.

Para produzir um conjunto de Mandelbrot precisamos conhecer a distância entre $a + bi$ e a origem dos eixos *(0 , 0)*. Essa distância é $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ e teremos que testar se um ponto se encontra dentro de um círculo de raio 2, de centro na origem dos eixos.

Se $|a + bi|$ for menor que 2, então saberemos que o ponto está dentro do círculo. Sendo o conjunto de Mandelbrot uma coleção de pontos "dentro" do plano complexo. Para calculá-lo, cada ponto é testado de maneira a verificar se sua posição se encontra dentro do plano. Eis como funciona esse teste:

Cada ponto testado determina uma seqüência de pontos no plano complexo. Essa seqüência, às vezes, é chamada de ***Órbita*** do ponto sob o teste.

Se qualquer um dos pontos na órbita pertencente ao ponto testado estiver fora do círculo de raio 2 em relação à origem, então o ponto testado não pertencerá ao conjunto de Mandelbrot. Como alternativa, poderíamos dizer que o conjunto de Mandelbrot consiste de todos os pontos testados cujas órbitas nunca escapam do círculo de raio 2, gravitando sempre dentro dele.

Um raio maior que 2 também proporcionaria um resultado satisfatório para esses cálculos, mas um raio menor, não. Um raio igual a 2 é assim, o menor raio centralizado na origem que contém todo o conjunto de Mandelbrot.

As órbitas são geradas a partir do ponto testado. Suponha que o ponto testado seja, inicialmente, o ponto da origem, $a + bi$, que chamaremos de C, a seqüência dos pontos gerados por C será designada $z_0, z_1, z_3, z_4, \ldots, z_n, \ldots$

Logo $z_0 = 0 + 0i$, ou seja $z_0 = 0$. Para obter o próximo número da seqüência, o membro anterior é multiplicado por si mesmo e somado a C. Esse processo de construção da seqüência é descrito pela equação:

$$z_0 = 0 + 0i$$

$$z_1 = z_0^2 + C$$

$$\ldots$$

$$z_{n+1} = z_0^2 + C$$

Vamos usar um ponto verdadeiro.

Suponha que o ponto testado seja o número complexo $z = 0.37 + 0.4i$. Calcular z_1 seria fácil, pois $z_1 = z_0^2 + (0.37 + 0.4i)$, $z_0^2 = 0 \times 0 = 0$, portanto $z_1 = 0.37 + 0.4i$.

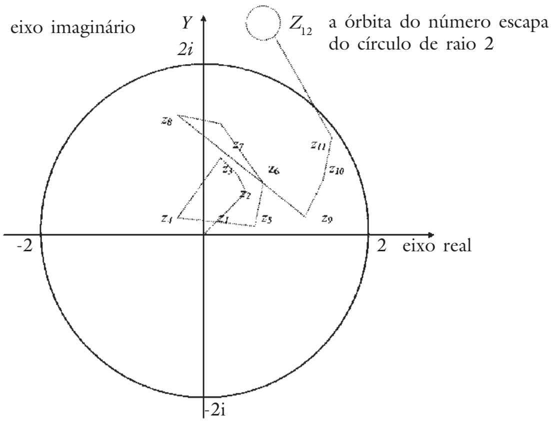
A distância deste ponto até a origem é $(0.37^2 + 0.4^2)$, ou cerca de 0.545, o que se encontra dentro do círculo de raio igual a 2.

O valor de órbita z_2 é $(0.37 + 0.4i)^2 + (0.37 + 0.4i)$. Utilizando um computador para facilitar os cálculos, obtivemos os números mostrados na tabela a seguir:

$z_0 = 0.000 + 0.000i$	$\|z_0\| = 0.000$
$z_1 = 0.370 + 0.400i$	$\|z_1\| = 0.545$
$z_2 = 0.347 + 0.696i$	$\|z_2\| = 0.778$
$z_3 = 0.006 + 0.883i$	$\|z_3\| = 0.883$
$z_4 = -0.409 + 0.410i$	$\|z_4\| = 0.580$
$z_5 = 0.369 + 0.064i$	$\|z_5\| = 0.375$
$z_6 = 0.502 + 0.447i$	$\|z_6\| = 0.672$
$z_7 = 0.422 + 0.849i$	$\|z_7\| = 0.948$
$z_8 = -0.173 + 1.117i$	$\|z_8\| = 1.130$
$z_9 = -0.848 + 0.014i$	$\|z_9\| = 0.848$
$z_{10} = 1.089 + 0.376i$	$\|z_{10}\| = 1.152$
$z_{11} = 1.415 + 1.219i$	$\|z_{11}\| = 1.868$
$z_{12} = 0.885 + 3.850i$	$\|z_{12}\| = 3.950$*

*sua distância é maior que o raio 2.

Como sua órbita escapa do círculo, o número *0.37 + 0.4i* não pertence ao Conjunto de Mandelbrot. (veja gráfico abaixo)[5].

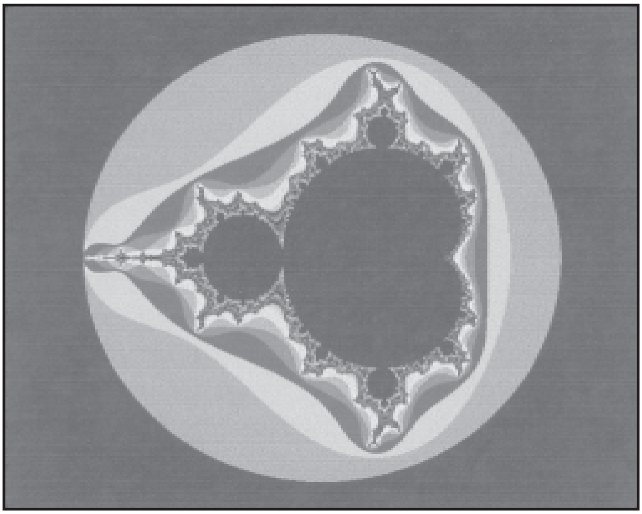


5. Tyler Branderhorst, *The waite group, Fractais for Windows*, p. 20.

Se calculássemos a seqüência da órbita a partir de 0.37 + 0.2i, verificaríamos que seus valores permanecem dentro do círculo durante os primeiros 100 cálculos.

Assim, para propósitos práticos, vamos dizer que o valor 0.37 + 0.2i esteja no conjunto de Mandelbrot, porque, para 100 valores de seqüência de órbita checados, todos estavam confinados dentro do círculo.[6]

7. A imagem gráfica do Conjunto de Mandelbrot



8. De onde veio, realmente, o Fractal de Mandelbrot?

Existem duas grandes "baías" no lago gigante, com enseadas menores na parte superior e inferior. A "costa" do lago é um ninho infinitamente detalhado de baías dentro de baías, resultando em estreitos filamentos irregulares que se desprendem como descargas elétricas. Essa figura representa um conjunto que James Gleick chamou de "o mais complexo objeto da Matemática".

Em contraste, examine esta fórmula:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

6. Tyler Branderhorst, *The waite group Fractais for Windows*, p. 26.

A aparência de simplicidade pode ser enganosa, pois uma fórmula aparentemente inocente como $E = MC^2$, de algum modo, consegue encapsular toda a teoria da relatividade. Mas não é isso que acontece com a nossa fórmula. Pegue um número, eleve-o ao quadrado e some outro número. Nenhuma sofisticação matemática. Assim, esta fórmula, acrescidos alguns detalhes sobre a verificação da fuga de órbitas, ira gerar o belo e intrincado Fractal de Mandelbrot.

A fórmula $z_{n+1} = z_n^{\ 2} + c$ pode ser simples, mas é repetida, isto é, *iterada* um grande número de vezes.

Os fractais foram descritos como padrões infinitos comprimidos dentro de um espaço finito. Existem muitos fractais, mas não importa quais sejam suas características especificas ou métodos de geração, já que todos eles se baseiam em algum tipo de esquema iterativo. Talvez o segredo seja este: as fórmulas desempenham um papel menor em um fractal, quando comparadas com os poderes iterativos em ação.

Mas mesmo isto não é suficiente para explicar os fractais por completo. E enquanto a matemática e o método iterativo forem lógicos, talvez as limitações da mente humana nunca nos permitam compreender os fractais, por inteiro. Para alguns de nós, é justamente aí que reside o seu encanto.[7]

9. Cores no Momento de Fuga

Uma atraente e colorida variação dessa figura pode ser obtida pintando-se os pontos que não pertencem ao conjunto de Mandelbrot, aqueles que escapam do círculo, de acordo com o tempo que a órbita leva para escapar (quanto tempo significa "quantas órbitas").

Podemos usar o número de iterações para controlar a cor final correspondente ao ponto testado. Assim, se escapar com poucas iterações, o ponto testado poderia ser pintado de vermelho, mas se durar mais tempo, sua cor poderia ser azul.

O método que acabamos de estudar para a geração de Mandelbrot é chamado de *fuga para o infinito*, pois o infinito é o atrator da órbita. Se continuarmos a calcular a órbita depois que um valor sair do círculo, a espiral desse ponto prosseguirá eternamente para fora.

7. Tyler Branderhorst, *The waite group Fractais for Windows*, p. 26.

10. Método de Newton

Um tipo similar de imagem fractal, no entanto, pode ser gerado, medindo-se o tempo de fuga em relação a um valor finito. Esse princípio é chamado *Método de Newton*.

Toda vez que se apertam as teclas de uma calculadora para o cálculo da raiz quadrada de um número, por exemplo, estaremos usando o *Método de Newton*. Esse método consiste em se apresentar um palpite como resposta e ir aplicando-se repetidamente o processo de forma que a série de respostas irá convergir, rapidamente, para a solução correta.

11. Vamos desenvolver a construção completa de um fractal

Considere o seguinte problema: *Calcular as raízes cúbicas do número 1.*

Resolução

$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1}$. Vamos considerar $z = 1$, então na forma algébrica, o número complexo z será escrito como $z = 1 + 0i$

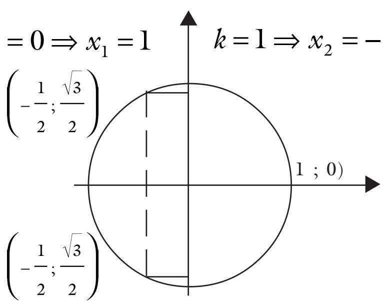
Aplicando-se a 3ª fórmula de Moivre:

$$\Rightarrow \rho = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1 \quad \text{e} \quad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{1} = 1 \\ sen\,\theta = \dfrac{0}{1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \theta = 0$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i sen\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

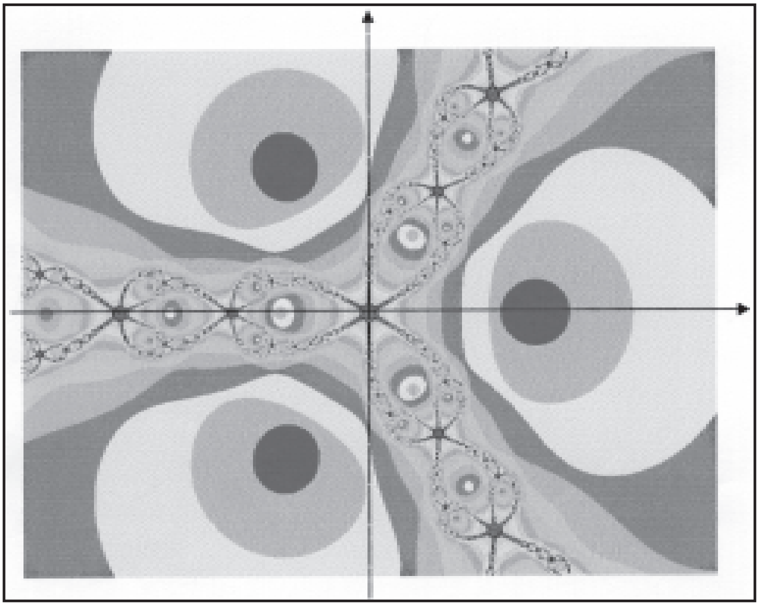
$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{0 + 2k\pi}{3} + i sen\frac{0 + 2k\pi}{3}\right)$$ atribuindo-se valores para *k:*

$k = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ $\quad k = 1 \Rightarrow x_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\quad k = 2 \Rightarrow x_3 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$



O algoritmo para a criação de um fractal com o *Método de Newton*, bastante similar ao de *Mandelbrot*, é:

$z_{n+1} = \frac{(2z^3 + 1)}{3z^3}$ e aplicado no problema, teremos a bela imagem a seguir:

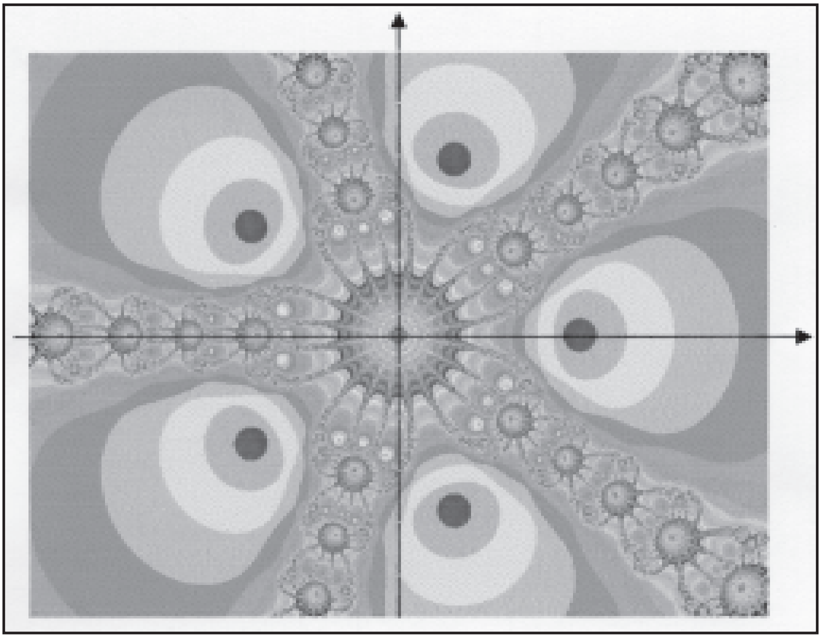


A principal novidade é que o *Método de Newton* para definir a fuga é diferente. Para o conjunto de Mandelbrot, a fuga significa que a órbita saia de um círculo de raio 2 centralizado na origem. As órbitas que se aproximavam do "imã" do infinito eram atraídas para ele. No caso do *Método de Newton*, existem três "imãs" localizados em cada uma das raízes cúbicas de 1, dentro do círculo de raio unitário. As órbitas cessam quando são irreversivelmente atraídas para esses imãs.

O interessante é que quando o palpite para o ponto, sob teste, fica entre dois dos três possíveis valores de atração, a resposta é o *caos*! As áreas coloridas de acordo como destino final da órbita entrelaçam-se em um padrão infinitamente complexo. Aplicada sucessivamente a fórmula de Newton para a seqüência $z_{0,}$ z_1 e $z_{2,}$ cada vez que a fórmula *iterada* testa a órbita para ver se ela se aproxima de uma das raízes. Se isso acontecer, o cálculo está terminado e z_0 receberá a cor da raiz que a capturou. As áreas próximas às três raízes, ao final, ficarão com um colorido sólido, na tonalidade escolhida para a raiz em questão. Na área entre as raízes, as três cores se entrelaçarão em um padrão complexo. Essas áreas são chamadas de *bacias de atração*, pois mostram todos os pontos iniciais que terminam convergindo para um determinado atrator.

Analogamente, teríamos padrões distintos para equações de outros graus.

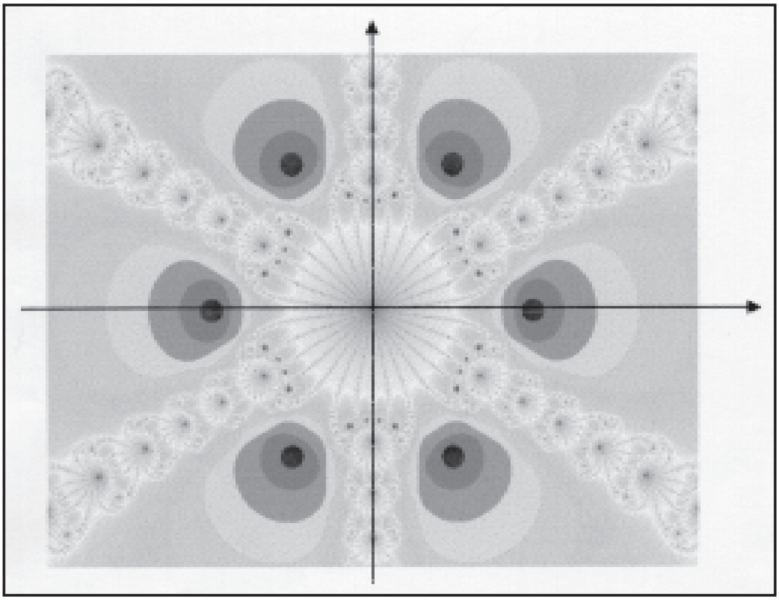
Para a equação $x^5 - 1 = 0$



Observe que a equação $x^5 - 1 = 0$ tem cinco raízes sendo uma real, no eixo real e quatro complexas formando ângulos de $\frac{2\pi}{5} rad$ entre elas.

$$\sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{1}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{5} + isen\frac{0+2k\pi}{5}\right)$$

Para a equação $x^6 - 1 = 0$



Observe que a equação $x^6 - 1 = 0$ tem seis raízes sendo duas reais, no eixo real e quatro complexas formando ângulos de $\frac{\pi}{3} rad$ entre elas.

$$\sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{6} + isen\frac{0+2k\pi}{6}\right)$$

e, dessa forma, poderíamos calcular as raízes de outras equações, e magníficos desenhos seriam criados por essa nova teoria.

12. Conclusões

Sabemos admirar as belas imagens gráficas dos fractais que se associam a equações matemáticas, mas dificilmente suas apresentações vêm acompanhadas de esclarecimentos que nos permitam compreender como eles são gerados a partir dessas equações.

Neste artigo, que é parte de um trabalho apresentado na Universidade São Judas, procuramos, de uma forma simples, intuitiva, sem maior rigor na linguagem acadêmica, mostrar como podemos construi-los com o auxílio de um computador pessoal.

O objetivo desta apresentação foi proporcionar uma noção do que vem a ser os fractais e relacioná-los com a teoria matemática a eles associada.

Bibliografia

BRANDERHOST, T., PETERSON, W. *The Waite Group, Fractais for Windows,* Rio de Janeiro, Berkeley, 1993.

CARVALHO, Maria Cecília e outros. *Fractais, uma breve introdução*. São Paulo, 1996.

PICKOVER, Cliffordd V. *Keys to Infinity.* Denver, John Wiley & Sons, 1995.

BOYER, CharlesB. *História da Matemática*. São Paulo, Edgard Blucher,1974.

MANDELBROT, Benoit. *The Fractal Geometry of Nature*. San Francisco, W.H.Freeman,1982.