Adição/subtração: os caminhos de sua psicogênese em situações de aprendizagem*

Maria Lúcia Faria Moro

Introdução

Este texto expõe uma reinterpretação de seqüências da aprendizagem da adição/subtração de alunos de 1ª série do 1º grau de uma escola pública de periferia urbana, analisadas em trabalho sobre a relação das construções cognitivas individuais de aprendizagem com as interações sociais de crianças e adulto-crianças.

É seu objetivo melhor compreender o processo de aprendizagem daquele conteúdo escolar da ótica da epistemologia do número (Gréco, Grize, Papert e Piaget, 1960; Gréco, Inhelder, Matalon e Piaget, 1963; Gréco e Morf, 1962) e a das proposições sobre o campo conceitual das estruturas aditivas (Vergnaud, 1985; 1989-1990; 1990b).

A perspectiva de aprendizagem adotada (Piaget, 1964; Piaget e Gréco, 1974) é a de que esse fenômeno consiste em um processo de elaborações de um aprendiz ativo, ocorrente sob a intervenção intencional e necessária de um ensino/professor. Este tem o papel de orientar, prover tarefas interessantes à estruturação progressiva do conhecer de cada aprendiz, tendo como referência as concepções ditas espontâneas do indivíduo. Essas concepções é que devem transformar-se em direção aos chamados conhecimentos científicos, os quais as integram e são então (re)organizados.

Essas referências é que apoiaram a escolha das situações de aprendizagem empregadas, que também contiveram tarefas de notação (produção e interpretação) relativas às tarefas anteriores de execução prática porque, afora ser a notação matemática parte inerente do aprendizado dos conceitos, a literatura sobre a psicogênese dos sistemas gráficos mostra que as notações ma-

* Agradecemos o apoio recebido do CNPq, na forma de auxílio a projeto integrado, bem como o da Capes, na forma de bolsa ao investigador pelo Programa Capes-BAP.

temáticas são objetos a ser também construídos, segundo caminhos próprios (Sinclair, 1989; Sinclair e Sinclair, 1986). Exemplificam essa posição os resultados de estudos sobre a compreensão do valor posicional numérico (Brun, Giossi e Henriquès, 1984; Lerner e Sadovsky, 1994; Sinclair e Scheuer, 1993; Sinclair, Tièche-Christinat e Garin, 1994; Teixeira, 1996).

No estudo original, a análise microgenética das estratégias cognitivas dos sujeitos expressas nas situações de aprendizagem sinalizou progressos na compreensão da adição/subtração. Apesar de pequenas diferenças interindividuais, os progressos dos três meninos pesquisados restringiram-se ao plano pré-operatório da construção do conceito.

A avaliação dos aspectos comuns dessa aprendizagem apontou a presença, no processo, de características que a literatura de tradição psicogenética toma como próprias do que seria a longa e complexa construção do sistema da adição/subtração ainda no plano de sua organização aritmética. São características inerentes à própria natureza das coordenações necessárias de esquemas pertinentes, típicas do conceito, mas tendo essa construção, como pano de fundo, o processo da psicogênese do número, sem, no entanto, a ele reduzir-se.

Esse gênero de resultado motivou-nos a revisitar a análise das estratégias cognitivas dos sujeitos, para verificar a especificidade do caminho da compreensão da adição/subtração por eles percorrido nas tarefas de aprendizagem propostas, tendo como referência a visão integradora que a idéia de campos conceituais propõe sobre o processo de elaboração daquele conceito como objeto de um ensino ancorado em invariantes advindas da sua construção psicogenética (Vergnaud, 1981; 1989-1990; 1990b).

Outra fonte motivadora para aquela revisão foi a desafiante agenda de pesquisa proposta por Brun (1996) para o campo da educação matemática, da qual pretendemos estar assim cumprindo, se não todos, ao menos alguns dos itens, tais como:

- descrever com precisão as várias condutas, procedimentos e elaborações dos alunos em cada situação;
- analisar as competências matemáticas organizadas, conforme a ótica dos esquemas, identificar os invariantes componentes desses esquemas e em relação às situações;
- seguir a transformação dos invariantes implícitos (teoremas-em-ato e conceitos-em-ato) em objetos matemáticos.

Consideramos que as perspectivas indicadas são caminho interessante para explorar o complexo e polêmico tema da relação entre a aprendizagem e o desenvolvimento cognitivo.

Resumimos, a seguir, alguns resultados das descobertas de Genebra sobre a epistemologia do número e algumas das proposições de Vergnaud, o apoio teórico para a reanálise de dados ora apresentada.

Genebra e a epistemologia do número

O programa de trabalho desenvolvido no âmbito do Centro Internacional de Epistemologia Genética, no final dos anos 50 e início dos anos 60, teve como objetivo rever as questões referentes às condições da gênese do número, em seus níveis mais elementares e em sua especificidade, e da ótica das suas supostas relações com noções quantitativas elaboradas pelas crianças no plano de uma "aritmética natural". Ou seja, visou-se testar aquelas interpretações, não mais a partir do exame das operações lógicas, mas, sim, da compreensão que as crianças têm dos números e da utilização que deles fazem.

Não foram olhadas as práticas numéricas escolares das crianças, cristalizadas, impostas, mas, sim, as realizações de que elas, muito cedo, são capazes. É exemplo o contar coisas quando, ao recitar a seqüência numérica, elas utilizam sem o saber: a correspondência biunívoca, a adição iterativa, a comutatividade da ordem das unidades (Gréco, Grize, Papert e Piaget, 1960).

Três obras principais relatam as descobertas mais significativas desse ciclo de estudos.

A primeira delas, *Problemas da construção do número* (Gréco, Grize, Papert e Piaget, 1960) demonstra que certas atividades inferenciais estão na base do lento e complexo processo da aritmetização do número. Algumas dessas atividades são: a iteração, definida como a ação de repetir uma operação (por exemplo, +1+1...) em que o objeto de cada repetição resulta da repetição precedente; a recorrência, que é o dar-se conta da repetição de um mesmo fenômeno (por exemplo, das ações de colocar/retirar elementos +1, +1, -1, - 1). São atividades que permitem compreender que os elementos são unidades equivalentes, iteráveis, mas distintas.

Essas inferências apóiam construções aritméticas posteriores, como a da conservação de quotidades e a da composição de relações iterativas por adição/subtração. A conservação de quotidades (Gréco, 1960) é a noção de que coleções numéricas, dispostas diferentemente no espaço, são equivalentes porque correspondem a "quotas" correspondentes (o nome do algarismo atribuído ao último elemento, pela ordem, no ato de contar cada coleção).

A síntese da cardinalidade com a ordinalidade (a compreensão dos números naturais como cardinais ordenados) é lenta e ocorre somente quando a iteração chega a ser operatória (cada repetição +1 ou -1 resulta sempre, na ordem, em alteração quantitativa correspondente do conjunto, não importando que elemento específico seja acrescentado ou retirado).

Em função dos limites ligados à pré-operatoriedade do processo cognitivo das crianças pequenas e dos das suas representações conceituais, a aritmetização progressiva dos números naturais faz-se por fases, de quantidades pequenas para as grandes: de 1 a 6/7; de 8 a 15; de 15/16 em diante.

A segunda das obras da referida trilogia, *Estruturas numéricas elementares* (Gréco e Morf, 1962) examina a origem de três elaborações importantes na construção numérica: a correspondência biunívoca, a conexidade e a comutatividade.

A correspondência biunívoca traz a compreensão da igualdade entre coleções, dando-lhes *status* cardinal ainda sem encaixes, quando as "quotas" (o nome do algarismo que designa o último elemento contado em cada coleção) são pré-números. Essa correspondência é uma inferência poderosa: ao lado da contagem, traz a conservação de quotidades como fase da construção numérica. Assim, como exposto, as coleções são entendidas como iguais pela atribuição do mesmo numeral com caráter de denominador das coleções (não ainda de numerador), sem haver conservação de quantidades numéricas propriamente dita.

A conexidade define-se como a propriedade de organização das primeiras coleções numéricas em um sistema seriado de elementos interligados por adições/subtrações iterativas. São descritas fases de sua construção: depois de sua ausência, quando a quantidade é avaliada pelo espaço ocupado, vêm os números seriados ligados por adições momentâneas, quando a extensão das coleções é identificada pelo numeral como denominador; adiante, enfim, a criança usa os numerais para representar quantidades seriadas, mas ainda sem sistema conexo, o qual será compreendido como tal em momentos posteriores.

A comutatividade da adição é a propriedade que implica a conservação do total, apesar de serem os termos da operação comutáveis. Tem sua gênese na correspondência biunívoca pré-operatória, para depois surgir como composição reversível com dissociação de conjuntos e subconjuntos e com a recomposição destes com redistribuição dos excedentes.

A terceira obra da trilogia, *A Formação dos raciocínios recorrenciais* (Gréco, Inhelder, Matalon e Piaget, 1963) traz resultados sobre a origem da recorrência em relação ao número qualquer: dar-se conta do reaparecimento do mesmo fenômeno, o que implica compreender a mesma passagem de n a $n+1$ por iteração, logo, captar o caráter de "qualquer" de n ao infinito.

Dado que a recorrência, como as demais inferências aritméticas, exige a coordenação progressiva da cardinalidade com a ordinalidade, verificam os autores que é a iteração que leva à compreensão da recursão. Logo, são importantes os seis momentos de sua evolução, a partir de características pontuais e qualitativas (iteração construtiva e iteração qualitativa) até a generalização no plano da aritmética formal, via iteração operatório-concreta.

Os mecanismos ligados à iteração prefiguram as operações numéricas e levam a formas elementares de recorrência, as que aparecem na equivalência entre coleções. Estas formas ligam-se ao número pela repetição da ação e pela transmissão da posição ao número seguinte. Então, a recorrência, como propriedade da ação repetida de juntar +1 em correspondência biunívoca, colabora com a construção da série de números desde seus primeiros níveis e é o aspecto inferencial da série como tal.

Em suma, esses resultados permitem ver que a adição/subtração, como sistema de operações imbricadas na construção do número, apóia-se na combinação de várias noções, inferências lógico-matemáticas características em transformação, das quais são exemplo as antes definidas: a iteração, a recorrência, a conexidade, a comutatividade.

A teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud

A contribuição de Gérard Vergnaud sobre os campos conceituais, elaborada no terreno da educação matemática, apóia-se, como sabemos, em pressupostos da teoria de Piaget.

Para Vergnaud (1989-1990), um conceito se define com apoio no seguinte tripé: o conjunto de situações que lhe dão sentido (referência); o conjunto de invariantes que constituem suas propriedades (significado); o conjunto de formas simbólicas ou lingüísticas que permite suas representações (significante).

A integração dessas perspectivas com a da construção psicogenética dos conceitos leva Vergnaud (1981; 1989-1990; 1990b) a definir *campos conceituais* como um espaço de problemas, de classes de problemas "(...) o conjunto de situações cujo domínio requer variedade de conceitos, procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão" (Vergnaud, 1989-1990, p. 62). É um problema qualquer situação que pede uma solução, trazendo aos sujeitos a necessidade de descobrir relações e explorá-las, de elaborar hipóteses e verificá-las (no âmbito escolar e não escolar).

Dois constructos piagetianos fundamentais são tomados e revisitados pelo autor para a elaboração da idéia de campos conceituais: o de esquema e o de invariantes operatórios.

O conceito de esquema (Vergnaud, 1990a) permite explicar a organização da atividade do sujeito em dada situação, estando no âmago da atividade adaptadora das estruturas cognitivas e permitindo melhor caracterizar os diversos momentos da psicogênese conceitual. Logo, funciona como unidade de análise das ações em uma situação.

O esquema comporta necessariamente invariantes operatórios e inferências, estas indispensáveis à aplicabilidade do esquema, como universal temporalizado, em cada situação (Vergnaud, 1990b; 1996). É exemplo lembrado pelo autor o da enumeração, que traz dois invariantes necessários ao seu funcionamento: a bijecção e a cardinalidade (o último numeral pronunciado representa a grandeza de toda a coleção).

Tipos lógicos de invariantes são definidos pelo autor, dentre os quais: a) invariantes do tipo "proposição", com valor de verdade e falsidade, os teoremas-em-ato; b) invariantes do tipo "função proposicional", os conceitos-em ato. Estes não são julgáveis como falsos ou verdadeiros, posto que são os componentes da proposições.

Os teoremas-em-ato designam as propriedades das relações encontradas pelo sujeito quando age sobre a realidade e resolve o problema presente. Eles permitem tratar as informações e podem ser descobertos sem ensino específico. Para empregá-los, o sujeito não necessita ser capaz de explicitá-los ou justificá-los. Por exemplo: a contagem dos elementos do segundo termo de uma adição a partir do total do primeiro termo.

Os conceitos-em-ato designam as "peças" componentes dos teoremas-em-ato, (estes não existem sem aqueles e vice-versa). São os instrumentos nocionais para resolver o problema. Por exemplo: os conceitos de estado inicial do primeiro termo da adição, o de transformação temporal da quantidade pelo acréscimo. Também raramente explicitados, são construídos na ação e só têm sentido em teoremas-em-ato verdadeiros, por meio dos quais podem exercer sua função (Vergnaud, 1989-1990; 1990a; 1990b; 1996).

Lembra Vergnaud (1990b; 1996), o funcionamento cognitivo do aluno comporta operações que se automatizam progressivamente, como também decisões conscientes, quando são levadas em conta as particularidades das variáveis da situação. Para o sujeito, um esquema será confiável quando apoiado em conhecimento, explícito ou implícito, das relações entre algoritmos e características do problema. A automatização, uma das manifestações da invariância da organização da ação, não impede que o sujeito controle as condições nas quais uma operação é adequada ou não. Assim, todas as ações comportam uma parte de automatismo e uma de decisão consciente. Essas idéias permitem entender que, em matemática, todos os algoritmos são esquemas, mas nem todo esquema é um algoritmo (ver também Falcão, 1996).

É nessa perspectiva que Vergnaud (1996) vê o conceito de esquema como interessante para o exame das relações e das defasagens entre saberes de ação e saberes teóricos, pois viabiliza entender como os primeiros permitem a ação em domínios nos quais a teoria é pobre ou inexistente, e como a ação pode alimentar-se da teoria e vice-versa.

Entretanto, para o autor (Vergnaud, 1990b; 1996), essas reelaborações sobre a noção de esquema não esgotam o tema da conceitualização do real a partir da ação. Dessa dinâmica, faz parte o processo paralelo e complexo da explicitação, da teorização dos conhecimentos, o que transforma os conceitos, os teoremas. São então igualmente importantes os esquemas responsáveis pelos enunciados dos conceitos-em-ato, exigindo a análise do papel da linguagem, dos sistemas simbólicos, na identificação e delimitação de domínios pertinentes.

Durante o ensino, as concepções dos alunos só alteram-se quando em conflito com situações a que não se aplicam. Logo, cabe ao professor, não apenas oferecer aos alunos situações de ativação de esquemas prévios, mas, sobretudo, as que os levem a reconstrui-los como novas relações diante de dados novos (Vergnaud, 1989-1990; 1994). Há, assim, estreitos vínculos entre uma situação e o esquema, entre este e o campo conceitual específico, permitindo ao professor captar o estado inicial e a transformação das competências dos alunos, assim melhor organizando seu ensino.

Ao definir as estruturas aditivas, Vergnaud (1985; 1989-1990; 1990b) analisou seis tipos de relações de base, que podem acarretar todos os tipos e níveis de problemas de adição/subtração na aritmética, conforme suas dificuldades estruturais: a composição de duas grandezas em uma terceira; a transformação quantificada de uma grandeza inicial em uma final; a comparação quantificada entre duas grandezas; a composição de duas transformações; a transformação de uma relação; a composição de duas relações.

Com essa classificação, o autor coloca a necessidade de serem considerados a confluência ou os desvios das concepções dos alunos, conforme as situações por eles encontradas, e as peculiaridades dos conceitos. É exemplo o das primeiras concepções das crianças sobre a subtração: a diminuição da quantidade inicial por perda, consumo, venda (junto com a concepção inicial da adição como aumento da quantidade). Assim, é difícil para elas compreender uma subtração (7-3) como: quantidade complementar (4 com 3 para completar 7); inversa de um acréscimo (se 3 são acrescentados e o total é 7, antes havia 4); diferença entre estados sucessivos (se antes eram 7 e agora são 3, então 4 foram subtraídos); relação de comparação (entre 3 e 7, há diferença de 4); diferença entre transformações (entre total parcial 3 e total final 7, houve acréscimo de 4).

Vergnaud (1981; 1991) registra que crianças de 3/4 anos apreendem que as coleções aumentam e diminuem por iteração +1 -1, o que lhes permite, com a contagem, aos 5/6 anos, resolver problemas de relações básicas mais simples. Aos 7 anos, pode estar presente a atribuição de cardinais a quantidades restritas, sendo a adição obtida pela busca do estado final, por contagem, a partir da reunião dos termos cardinalizados. Contudo, só há domínio de relações mais complexas ao redor de 15 anos de idade.

Vergnaud (1991) afirma que os problemas aditivos de comparação de coleções discretas são os primeiros em que uma criança pequena pode atribuir valor funcional ao conceito de número. São assim critérios para a construção desse conceito, segundo o autor: a cardinalização (a repetição do total à pergunta "quanto?", sem contar de novo); a aquisição (para coleções pequenas) do axioma básico da teoria da medida: card $(A \cup B = \text{card}(A) + \text{card}(B)$, sendo $\cup$ união disjunta), este um teorema-em-ato se a criança emprega a contagem CAF (*counting all first*) (Baroody e Ginsburg, 1986).

Vergnaud (1985) recomenda ao professor salvaguardar, nos problemas, a peculiaridade da subtração, pelo significado natural das transformações nela envolvidas. A subtração não se subordina à adição e não precisa, então, basear-se na introdução prévia desta operação, nem ser definida isoladamente como o inverso da adição. O professor deve, sim, trabalhar o caráter oposto e/ou recíproco das duas operações.

Portanto, a análise dos problemas aditivo/subtrativos, na visão de campo conceitual, permite constatar as diversas relações, tipos de problemas, procedimentos, representações simbólicas ali envolvidos. Para verificar a construção dos alunos a respeito, é necessária a análise detalhada das suas condutas em situação (a ação situada).

É esse gênero de análise detalhada que realizamos para responder aos objetivos do presente estudo. Para tanto, escolhemos algumas das seqüências de estratégias cognitivas de dois sujeitos em tarefas das situações de aprendizagem empregadas no estudo original.

Método

Os dois sujeitos, JAn e Rod tinham 9,1 e 8,6 anos de idade, respectivamente, e eram alunos multirrepententes da 1ª série. Por sorteio aleatório, eles compuseram, com um terceiro menino, a tríade do estudo original.

As situações de aprendizagem que lhes foram oferecidas são, em síntese, assim descritas:

- a primeira teve uma seqüência de seis tarefas de composição/decomposição de quantidades numéricas, a série de números naturais de 1 a 10, por iteração de ações +1, -1, com fichas de papel cartão, seguindo-se sempre os pedidos do adulto para explicar as realizações efetuadas. Complementava-as uma tarefa de produção de notações sobre as realizações anteriores (em uma folha de cartolina com canetas hidrocor de cores diferentes), com explicação oral das notações produzidas.
- a segunda referiu-se a tarefas de composição aditiva de número, em que dois parceiros faziam a composição conjunta de uma quantidade

em duas parcelas, conforme quantidade de referência escolhida pelo terceiro parceiro, seguida da explicação oral da composição efetuada. O material consistiu de três conjuntos de 8 caixas de fósforo de cores diversas (cada conjunto tinha uma caixa sem palitos e 8 caixas contendo a série de 1 a 8 palitos, respectivamente). Seguiu-se também a tarefa de produção de notações sobre as realizações da tarefa anterior, com explicação oral das notações produzidas.

Os dados, do decorrer de toda a seqüência das situações (verbalizações e realizações práticas de cada sujeito e do adulto), foram gravados em vídeo e áudio. Transcritos, eles passaram por uma análise qualitativa microgenética em diferentes níveis de descrição (Gardin, 1974; Gilliéron, 1985), da qual resultou a identificação das estratégias cognitivas empregadas pelos sujeitos e de suas inter-relações.

Esses mesmos procedimentos qualitativos de análise foram empregados para reinterpretar as seqüências de aprendizagem, neste estudo, visando especificamente:

- redefinir as estratégias cognitivas dos sujeitos, antes identificadas, como esquemas para enfrentar as tarefas, na acepção de Vergnaud (1990a; 1996).
- identificar a presença de invariantes (teoremas-em-ato e conceitos-em-ato) nos esquemas referidos.
- verificar a presença de sinais de mudança daqueles invariantes, na situação de aprendizagem, no sentido da compreensão da adição/subtração.

Para redefinir as estratégias cognitivas como esquemas, buscamos identificar, com a maior consistência possível, as características da seqüência de realizações dos sujeitos ali expressa como uma organização específica de ações, uma totalidade dinâmica funcional e universal a um classe determinada de situações-problema, e que traz finalidades, antecipações, regras de ação, inferências e invariantes, assim funcionando naquele espaço para a solução do problema específico (Vergnaud, 1990a; 1996).

Para identificar em cada esquema a presença dos invariantes mencionados, procuramos seguir os seguintes caminhos, tendo como apoio as contribuições descritas na literatura sobre a epistemologia do número já referidas neste texto (Gréco, Grize, Papert e Piaget, 1960; Gréco, Inhelder, Matalon e Piaget, 1963; Gréco e Morf, 1962).

No caso dos teoremas-em-ato, buscamos "ler", em cada esquema, a presença de relações com propriedades típicas de organização das soluções dos sujeitos – suas inferências específicas em transformação – e como comuns às diferentes manifestações evolutivas do esquema e compatíveis entre si como elementos de uma "rede" proposicional.

No caso dos conceitos-em-ato, a "leitura" efetuada em cada teorema-em-ato procurou identificar as noções que o estariam compondo. É por essa razão que, na seção de resultados, expomos primeiro os teoremas-em-ato e, depois, os conceitos-em-ato "lidos" em cada esquema.

Frisamos que esse gênero de análise, de caráter exploratório, não teve a pretensão de esgotar as identificações possíveis. Logo, outros invariantes podem estar subjacentes aos esquemas dos sujeitos sem que os tenhamos descrito.

Resultados

Diante dos limites à extensão deste texto, serão expostos os resultados da análise de dois recortes das seqüências de aprendizagem: um, do sujeito JAn, em tarefa de composição de quantidades numéricas (os números naturais de 1 a 10) por iteração de elementos +1, –1; o outro, do sujeito Rod, em tarefa de composição aditiva de número.

Expomos os resultados em quadros, um para cada recorte apresentado. Neles, para cada situação-problema proposta pelo adulto, está descrito o esquema empregado pelo sujeito e os invariantes em jogo na organização e emprego do respectivo esquema.

Destacamos que, na investigação original, cada sujeito manifestou tais realizações em parceria com dois outros, no contexto das interações sociais estudadas, mas essa dimensão não será, neste trabalho, focalizada.

O Quadro 1, a seguir, expõe a seqüência das realizações de JAn na primeira tarefa de composição de quantidades numéricas, o primeiro recorte em análise.

Quadro 1: Recorte 1 - A seqüência de JAn, tarefa A: de composição das quantidades numéricas por iteração (a série de números naturais

		Invariantes	
Situação-problema	Esquema	Teorema-em-ato	Conceito-em-ato
Fazer filas, da de 1 até a de 10 elementos ("quadradinhos").	Compor duas coleções de 5 elementos cada, por acréscimos/decréscimos sucessivos de elementos +1+1..., com correspondência biunívoca e contagem como controle dos acréscimos, apontando-lhes total =10.	- recorrência de adições sucessivas +1 +1..., sem recorrência de subtrações. - correspondência biunívoca intuitiva entre elementos de duas coleções. - bijecção nome do numeral /gesto indicativo conforme cada coleção/parcela.	- iteração aditiva sem subtração. - quotidade (cardinalidade sem encaixes). - estado inicial de elementos e de parcelas adicionáveis que aumentam no tempo por acréscimos. - conexidade (cada elemento acrescido como diferente de outro, mas a este ligado na composição da coleção/parcela).
Fazer uma porção de filas, desde a de 1 até a de 10...	Compor várias coleções de 10 elementos cada (exceto uma =2), por acréscimos sucessivos de elementos +1+1..., com contagem como controle e anulando coleções anteriores 5 e 5.	- recorrência de adições sucessivas +1+1... até limite =10, s/subtrações. - correspondência global entre as várias coleções controladas pelo limite atribuído =10. - bijecção nome de numeral/gesto indicativo conforme cada coleção.	- iteração aditiva sem subtração. - estado inicial das unidades/parcelas que aumentam no tempo por acréscimos, limitadas pelo esgotamento de elementos disponíveis a acrescentar. - quotidade (cardinalidade sem encaixes) equivalente às várias coleções.
Fazer muitas filas: de 1, de 2, depois de 3...	Compor coleções de quantidades diversas por acréscimos sucessivos de elementos +1+1..., anulando coleções anteriores, com correspondência global e/ou biunívoca intuitiva como controle. Primeiro, são compostas coleções de 1 a 3, depois, as de grandezas maiores, em ordem decrescente. Resultam coleções de grandezas diferentes, algumas repetidas.	- recorrência de adições sucessivas +1+1..., pregnante à recorrência de subtrações. - correspondência entre elementos de várias coleções, oscilante global/ intuitiva. - comparação entre coleções conforme extensão espacial e quotas atribuídas em ordem decrescente. - equivalência de quotas atribuídas a elementos de coleções de grandezas diversas.	- iteração aditiva predominante à subtrativa. - estado inicial das unidades/parcelas adicionáveis que aumentam no tempo por acréscimos limitados a certa quota prevista segundo ordem decrescente. - quotidade (cardinalidade sem encaixes) com atribuição de denominadores conforme ordem decrescente. - conexidade (cada elemento acrescido diferente de outro mas ligado a este por adição precária nas composições).

Continuação

Situação-problema	Esquema	Invariantes Teorema-em-ato	Conceito-em-ato
Descrever resultados dos acréscimos efetuados.	Identificação de coleções de grandezas menores (de 1 a 3) por contagem.	- bijecção nome do numeral/gesto indicativo a cada elemento em cada coleção em separado. - atribuição de quotidade conservada e específica a cada coleção.	- quotidade (a cada coleção um denominador conforme ordem crescente). - conexidade (cada elemento acrescido ligado a outro conforme quota denominadora da ordem da série).
Verificar quantos elementos em cada fila composta.	Reconhecimento/evocação de quantidades de maior grandeza (de 5 a 10) por expressão verbal mecânica da série de numerais.	- atribuição mecânica de nomes de numerais a cada coleção presente conforme ordem decrescente de emissão dos nomes.	- denominação de coleções conforme a série verbalizada de numerais.
Refazer coleções de 5 a 10 elementos ("quadradinhos").	Recompor/compor coleções de grandezas maiores (de 5 a 10), conforme previsões em ordem decrescente, por acréscimos/decréscimos sucessivos de elementos +1-1..., com a contagem e a correspondência global e/ou biunívoca intuitiva como formas de controle.	- recorrência de adições sucessivas de elementos a coleções presentes de limites variados na série. - correspondência entre elementos de várias coleções, oscilante global/intuitiva. - bijecção nome do numeral/gesto indicativo a cada elemento em cada coleção. - equivalência de quotas atribuídas a elementos de coleções de grandezas diversas.	- iteração aditiva/subtraíva com predomínio da aditiva. - estado inicial das unidades/parcelas adicionáveis e subtraíveis que aumentam/diminuem no tempo conforme quota prevista na ordem decrescente. - quotidade (cardinalidade sem encaixes) com atribuição de quotas/denominadores a cada coleção em ordem decrescente. - conexidade (cada elemento acrescido/subtraído diferente de outro, mas com ligação instável com este outro na composição/decomposição).

Os esquemas de JAn indicam a ocorrência, na seqüência, de avanços nas suas soluções ao problema proposto, a partir da solução inicial, segundo a qual compor quantidades numéricas de 1 até a de 10, com o material, significa compor duas coleções de 5 elementos cada e adicioná-las.

À provocação do adulto para buscar outra solução, JAn atende a parte do pedido "muitas filas", ao propor muitas coleções de 10 elementos, mas ainda com a idéia de que "desde a de 1 até a de 10" significa coleções =10 e não as de outras grandezas. Sua ação de acrescentar segue impondo-se, pois compõe mesmo coleção =2 para esgotar o material disponível.

Somente na terceira tentativa, após o adulto explicitar dever ser composta cada fila, "de 1, de 2", é que ocorre uma reorganização do esquema anterior de JAn: sem aproveitar as composições anteriores, ele compõe outras, de grandezas maiores e menores, aproximando-se da série de coleções de 1 a 10.

Quando solicitado a descrever a solução encontrada, as coleções de menor grandeza (de 1 a 3) são efetivamente identificadas, mas não as mais numerosas, estas evocadas via esquemas algorítmicos de enunciação mecânica da série de numerais, sem qualquer apoio na verificação das realidades quantitativas presentes.

À quarta e última tentativa de solução da seqüência, faz JAn uma expressiva reorganização de seus esquemas anteriores, sobretudo por apoiar-se na verificação de quantidades presentes para fazer a previsão de outras. Assim, parece entender que as coleções presentes podem ter suas grandezas alteradas por acréscimos/decréscimos, sem o "desmanche" das atuais, e expressa, no plano da ação, a relação de inversos retirar/acrescentar para obter diferenças quantitativas entre coleções, o que é básico na compreensão do sistema da adição/subtração.

Essas alterações encontram sentido ao se constatar sinais evidentes de progressão dos invariantes de apoio dos esquemas de JAn. Assim, sobre esses invariantes, dos identificados como teoremas-em-ato, temos:

a) a ***recorrência***, como propriedade inferida da relação entre ações repetidas, subjaz às realizações de JAn, primeiro essencialmente aditiva, obedecendo às quotas/limite das ações de "juntar" para, progressivamente, dar lugar à sua dimensão subtrativa. Porém, somente no último esquema da seqüência faz-se presente uma recorrência aditiva/subtrativa, mas ainda sem compensação de ações inversas.

b) a *correspondência entre elementos* aparece entre as várias coleções e oscila, na seqüência, entre global e biunívoca intuitiva. Primeiro, JAn apóia-se em uma eficiente correspondência biunívoca intuitiva ao compor coleções de menor grandeza (as simétricas 5 e 5), o que não ocorre com as de maior grandeza. Assim, presente no controle das composições/decomposições, esse invariante marca a solução das tarefas.

Em transição, esse teorema-em-ato interliga-se à presença de outros, o que subjaz ao esquema usado por JAn na terceira tentativa de solução da tarefa, tal como:

c) a *comparação entre coleções*, efetivada conforme a extensão espacial dessas coleções e as quotas a elas atribuídas em ordem decrescente. É relação que permite inferir diferenças ou equivalências de grandeza entre as coleções, porém tendo apoio na extensão do espaço ocupado pelos elementos que as compõem. Esse aspecto traz a atribuição à coleção da quota correspondente na série verbal decrescente adotada.

d) a *bijecção*, presente na contagem de cada coleção, serve para delimitar as parcelas (5 e 5) do total =10, na primeira tentativa. Entretanto, se no caso de coleções de menor grandeza (as de 1 a 3), a bijecção é eficiente, ela nem sempre o é para as grandezas maiores: há marcas de automatização na emissão da série de numerais, perturbando a expressão do gesto indicativo de atribuição de cada um deles ao exemplar do material quantificado. Também, esse teorema-em-ato tem sua presença interligada nos esquemas de JAn a outro (terceira e quarta tentativas), o da

e) *equivalência de quotas*, estas aplicadas a elementos de grandezas diversas. É relação que permite atribuir o mesmo denominador a realidades/elementos unitários diferentes, componentes de coleções diferentes. Sinaliza avanço de JAn em conservação de quotidade, conceito central à compreensão da comutatividade de adições/subtrações reversíveis.

f) a *atribuição de quotidade conservada*, que aparece como relação entre um numeral como denominador e uma coleção específica. É teorema-em-ato ainda limitado em JAn porque presente apenas em relação a grandezas menores, exatamente no limite =3, por contagem. Ganha imprecisão acentuada no caso das grandezas maiores, ligada à bijecção. É assim que surge um outro invariante, o da

g) *atribuição mecânica de nomes de numerais a cada coleção*, um componente do esquema de reconhecimento expresso à tarefa de verificação da quantidade de elementos de cada coleção, em particular então as de 5 a 10. Das grandezas maiores para as menores, expressa-se essa relação em JAn com marcas evidentes de mecanização verbal, sem o sujeito preocupar-se em verificar a falsidade ou veracidade da relação numeral atribuído/grandeza presente. Ele parece supor aquela veracidade, pautado também pela relação de correspondência global presente.

Quanto aos conceitos-em-ato, identificados como componentes nocionais de base, presentes nos teoremas-em-ato descritos, temos:

a) a *iteração*, atividade central da tarefa, está naturalmente presente nos vários esquemas do sujeito. Como componente próprio da recorrência, e na base de outros teorema-em-ato, como os da correspondência e da bijecção, a iteração mostra também sua progressão na seqüência dos esquemas de JAn: de somente aditiva, construtiva, pouco a pouco passa à subtrativa e de ordem qualitativa "mais que..., menos que", mas sem coordenação da cardinalidade com a ordinalidade, mostrando ainda o predomínio do movimento aditivo. Necessariamente decorrente da iteração, temos

b) a *conexidade*, que, de início, na adição de parcelas 5+5, parece ser estável. Mas, com as coleções de grandezas maiores, manifesta-se sobretudo como conexidade aditiva momentânea (por vezes, regulada pelo espaço ocupado). Apenas ao final, dela aparece uma progressão para a noção de elementos conexos aditivo/subtrativos mais estáveis, somente sinal em direção à conexidade reversível na composição/decomposição de grandezas.

c) o de ***estado inicial de termos a adicionar*** com o conceito decorrente de ***transformação temporal das grandezas***, também identificáveis nos vários esquemas de JAn. No primeiro esquema, o conceito de estado inicial evidencia-se no adicionar à primeira parcela (5) a segunda (5), que a transforma para compor o esperado 10. Porém, adiante, à busca de solução mais adiantada, aqueles conceitos retornam à sua fase menos complexa, apoiando-se o sujeito em uma noção de estado inicial de unidades/parcelas, cuja transformação só encontra limite ao serem esgotados os elementos a acrescentar.

Depois, esses conceitos sinalizam uma progressão: as unidades/parcelas iniciais são tanto adicionáveis como subtraíveis, acarretando as transformações decorrentes em ambos os sentidos, tendo como referência as quotas previstas em ordem decrescente. Aparecem, também, alguns sinais do menor predomínio das adições sobre as subtrações, com alternâncias entre essas ações opostas em termos de composições/decomposições.

d) a *quotidade*, conceito básico na compreensão da adição/subtração, está presente a cada esquema de composição das quantidades numéricas, embora nem sempre resulte em atribuição correta de quotas denominadoras, pela interferência da verbalização mecanizada da série de numerais. De qualquer modo, a quotidade expressa é a típica cardinalidade sem encaixes, sem sinal de coordenação com a ordinalidade, algo também evidenciado por JAn ao expressar, somente, a conservação de quotidade de 1 a 3, as grandezas menores.

Essa "compreensão-em-ato" da quotidade, em especial da quotidade conservada, ainda tão oscilante no sujeito, torna-se evidente diante de outro conceito-em-ato, expresso como subjacente à solução da tarefa de verificar/identificar as grandezas maiores (de 5 a 10), o da

e) ***denominação de coleções conforme a série verbalizada de numerais***, deixando-nos entender que, ao empregar seu esquema de reconhecimento, é necessário a JAn dar um nome a coleções conforme a série de numerais. Porém, esta é lembrada sem a compreensão do significado real dos nomes expressos.

Em resumo, a análise da seqüência das realizações de JAn mostra as transformações dos esquemas do sujeito, tendo como subjacentes certos invariantes pertinentes ao campo conceitual da adição/subtração e tratando-se de relações e conceitos em transformação interligada. São transformações que parecem ocorrer no sentido de um progressivo movimento da ausência para a presença de coordenação entre acréscimos e decréscimos de elementos nas composições quantitativas.

"Pano de fundo" desse movimento, invariantes em transformação também apóiam os esquemas de controle e os de interpretação numérica das coleções compostas (as correspondências e comparações, as equivalências de quotidade, por exemplo), cuja utilização dá-se com maior ou menor dificuldade conforme as grandezas das coleções, ao competir com outros esquemas, de ordem algorítmica, mas de aprendizado não significativo, mecanizado, pelo sujeito.

A seguir, o Quadro 2 expõe uma seqüência de realizações do sujeito Rod, em outra tarefa, a de composição aditiva numérica.

Quadro 2: Recorte 3 - A seqüência de Rod, 1a parte, tarefa de composição aditiva de números.

		Invariantes	
Situação-problema	Esquema	Teorema-em-ato	Conceito-em-ato
Escolher uma parcela para compor um total conforme quantidade de referência.	Identificar grandeza da quantidade referente para a composição de outra equivalente.	- atribuição de quotidade conservada equivalente a mais de uma coleção.	- quotidade (cardinalidade sem encaixes) com equivalência de denominadores a coleções de mesma grandeza.
Escolher uma parcela para compor total conforme quantidade de referência.	Buscar/escolher quantidade de elementos =7 como parcela de outra quantidade a compor, igual à de referência (=7), verificando-a por contagem unitária/verbal.	- recorrência de adições sucessivas +1 +1... até limite previsto =7; - bijecção nome do numeral/gesto indicativo a cada elemento em cada coleção; - composição de coleções de grandezas equivalentes, sem parcelamento; - atribuição de quotidade conservada equivalente a mais de uma coleção.	- iteração aditiva +1+1...; - quotidade (cardinalidade sem encaixes) com atribuição de quota denominadora a cada elemento da coleção; - conexidade (cada elemento acrescido diferente de outro, com ligação mais estável a este na composição da coleção); - equivalência de coleções de termo único.
Verificar adequação 7+7=7	Prever parcela =6, a partir da negação de parcela=7 por resultar excedente de 7 (7+7) para referente =7.	- composição de coleções de grandezas equivalentes com parcelamento; - parcela a acrescentar para compor quantidade equivalente à referente como menor que este referente.	- quotidade (cardinalidade sem encaixes) com equivalência de denominadores a coleções de mesma grandeza; - estado inicial de unidades/parcelas adicionáveis que aumentam n por acréscimos limitados à quota prevista. - parcelamento de coleções quantitativas.

Continuação

Situação-problema	Esquema	Invariantes Teorema-em-ato	Invariantes Conceito-em-ato
Verificar necessidade de compor segunda parcela =7 diante de acréscimo de outra quantidade =7	Reconhecer algarismo =0 (zero) como resultado da adição verbalizada de quantidade = ao mesmo algarismo =0 (7+0=0).	- adição verbal de um algarismo ao signo de ausência de quantidade 0 (zero) resulta em 0 (zero); - adição verbalizada conforme seqüência de pistas verbais.	- o zero grafado (0) é signo de presença afirmativa de algo; - o zero grafado (0), adicionado a qualquer quantidade/algarismo, resulta em zero (0).
Verificar adequação de primeira parcela =3 sugerida para referente =7.	Compor quantidade/parcela =3 por acréscimos sucessivos +1+1..., para referente =7 em correspondência biunívoca intuitiva com parcela correspondente de elementos do referente.	- recorrência de adições de elementos +1 =1... até limite = 3; - correspondência biunívoca entre elementos da parcela composta e os da quantidade de referência; - atribuição de quotidade conservada à 1ª parcela escolhida representando a grandeza da parcela. - composição de coleções de grandezas equivalentes com parcelamento.	- iteração aditiva +1+1+1; - quotidade (cardinalidade sem encaixes) com atribuição de quotas a cada elemento acrescido. - conexidade (cada elemento acrescido diferente de outro, com ligação mais estável a este na composição da parcela); - estado inicial de unidades/parcelas adicionáveis que aumentam no tempo e no espaço conforme quota prevista; - parcelamento de coleções quantitativas.

Sobre os resultados expostos no Quadro 2, vemos que, antes de escolher a parcela de uma quantidade total, igual à de referência, a identificação que Rod pede e faz desse referente mostra-o levando-o em conta como parâmetro para a nova composição, daí sua necessidade de assegurar-se de sua grandeza.

Contudo, seu esquema de busca e escolha da quantidade =7 (igual à de referência) mostra sua limitação quanto à necessidade da composição aditiva de uma grandeza em duas parcelas coordenadas, tal como solicitado.

Depois, sua previsão de parcela =6, após hesitação, indica ter o sujeito dado-se conta da necessidade da composição aditiva em parcelas e, para tanto, da escolha, como primeira parcela, de uma quantidade não excedente à de referência.

Antes de seguir nessa composição, ao desafio do adulto sobre escolha a fazer no caso de manter-se a quantidade =7 (para referente =7), Rod admite a ausência de elementos. Mas, seu reconhecimento confirmado da adição 7+0=0, mesmo diante da identificação da presença de 7 elementos, sugere sua incompreensão do que o numeral/algarismo zero representa e do seu significado quando adicionado a outro algarismo. Assim, segue negando adição 7+0=7, apesar da presença dos 7 elementos como quantidade equivalente à de referência.

Seu último esquema, na seqüência analisada, mostra ter Rod chegado à necessidade de acrescentar parcela de grandeza menor que a de referência, inclusive controlando sua escolha pela comparação dessa quantidade com a da parcela escolhida.

Nesses esquemas de Rod, vimos a presença dos seguintes teoremas-em-ato como invariantes de apoio, assim analisados:

a) a ***atribuição de quotidade conservada***, como equivalente a mais de uma coleção, está presente, em sua forma básica, no esquema de identificação utilizado por Rod ao denominar, com o numeral correspondente, a quantidade de referência, para poder decidir sobre outra composição. Então, manifesta-se novamente com precisão esse teorema-em-ato, na busca e escolha da quantidade da outra coleção, fazendo-nos entender que Rod compreende que um mesmo denominador (7) pode aplicar-se a mais de uma coleção. Logo, as coleções podem portar e conservar a mesma quota, o que as fazem "iguais". Volta a manifestar-se esse invariante, ao final da seqüência, quando Rod denomina a primeira parcela escolhida uma composição aditiva, mostrando que, por ora, mantém-se a coleção identificada com um cardinal. Mas essa identificação não vem ainda de relações aditivo/subtrativas +1–1, mas apenas da contagem com base em quotas.

b) a *recorrência*, presente como aditiva nos esquemas de busca/escolha e de composição de coleções totais e/ou de parcelas de Rod, posto que subjacente aos acréscimos, mas sempre obedecendo às quotas/limite previstas para tais acréscimos.

c) a *correspondência entre elementos*, que aparece em seu patamar de biunivocidade intuitiva na composição da primeira parcela (3) de uma adição a realizar-se (de total =7). É ela expressa com eficiência pelo sujeito exatamente como controle da adequação da parcela, como menor que a totalidade. Essa relação leva-nos e entender outra, a de

d) *composição de coleções equivalentes* que, no primeiro esquema de busca/escolha de Rod da seqüência, surge em um patamar relativamente menos adiantado: uma outra coleção de grandeza equivalente à de referência pode ser proposta, logo, sem parcelamento. No entanto, depois, na previsão de parcela =6 e, ao final da seqüência, na escolha e composição da parcela =3 (para total de referência =7), parece Rod passar a compor grandezas com base no parcelamento. Este aspecto é decisivo ao domínio da composição aditiva de grandezas diversas, resultando em uma terceira e, assim por diante, como adições possíveis.

e) a *bijecção*, de presença evidente apenas quando Rod expressa contagem em seu primeiro esquema de busca/escolha da quantidade =7. É ela eficiente como controle do sujeito da quantidade prevista, referindo-se a cada elemento, os da coleção de referência e os da coleção quantitativa escolhida.

f) a ***adição verbal de zero a outro algarismo resultando em zero***, que surge como um invariante no plano da adição verbalizada, no esquema de reconhecimento de Rod do resultado da adição 7+0. Caracteriza-se como um invariante de ordem algorítmica, mas que se aplica mecanicamente, sem significação relativa à coleção quantitativa presente: o sujeito aponta o zero "nada" como resultado do acréscimo de um zero, sem considerar a presença real de 7 elementos. Interligado a esse teorema-em-ato, identificamos o da

h) ***adição como seqüência de pistas verbais***, seqüência composta de pistas verbais algarismos/termos e nomes dos sinais, expressa por Rod ao reconhecer o zero (sinal 0) como resultado da adição 7+0. Mostra o sujeito dominar adições automatizadas conforme a seguinte cadeia verbal: ao enunciado de um algarismo segue-se como pista de adição a expressão "mais", seguida do nome de outro algarismo e a pista "igual", a qual traz outro nome de algarismo, o resultado. Portanto, a adição $7+0=0$ para Rod, é de caráter essencialmente mecanizado.

Quanto aos conceitos-em-ato, de base aos teoremas-em-ato identificados, temos nos esquemas de Rod, os seguintes:

a) a *iteração*, que se faz presente também como aditiva, em seu patamar apenas construtivo, nos esquemas de busca/escolha e de composição quantitativa. Como componente da recorrência, e na base de outros teoremas-em-ato como os da correspondência entre elementos ou, no caso, o da bijecção, a iteração está interligada a outro conceito, o da

b) *conexidade*, aparecendo mais estável em Rod, mas somente como conexidade aditiva: primeiro na busca/escolha de quantidade sem parcelamento; depois, na composição de parcela escolhida, quando os elementos conexos aditivos limitam-se à quota 3.

c) o de ***estado inicial de termos a adicionar***, com o da decorrente ***transformação temporal de grandezas***, conceitos que aparecem somente quando Rod dá-se conta, em seu esquema de previsão, de que há unidades/parcelas a adicionar, e de que elas são transformadas por outros acréscimos que lhes são efetuados. Assim, estão esses conceitos presentes em patamar pouco complexo e não ainda como termos iniciais a adicionar e que, por isso, transformam-se em um terceiro. Este conceito aparece interligado à manifestação da noção de parcelamento, que é antecedida pela de

d) ***equivalência de coleções quantitativas de termo único***, de que Rod deixa entrever a presença ao buscar/escolher uma coleção quantitativa equivalente à de referência, vendo essa coleção como composta de um termo ou parcela única até a quota 7, sem trabalhar com qualquer parcela desse total $=7$. Porém, na seqüência, no esquema de previsão, manifesta-se o conceito que representa uma progressão em relação a este anterior, o de

e) ***parcelamento de coleções quantitativas***, revelado primeiro naquele esquema de previsão (parcela $=6$) e, depois, no de composição de parcela ($=3$). Faz-nos entender que Rod passa a dispor do seguinte apoio conceitual ao invariante da composição aditiva: uma coleção quantitativa pode ser parcelada em termos diversos, de extensão variada, mas menores que a quantidade total.

f) a *quotidade*, presente tanto no primeiro esquema, o de identificação de grandeza quantitativa de referência, como nos demais, de busca/escolha de quantidades e, adiante, de previsão e de composição de parcelas. Trata-se, também em Rod, da típica cardinalidade sem encaixes, mas que lhe permite denominar coleções de mesma grandeza com o mesmo denominador, bem como designar cada elemento de coleções diversas com quotas denominadoras na ordem, na medida em que elementos são acrescidos à coleção. Esse conceito tem sua relação com os que seguem, primeiro, o de

g) *zero como signo gráfico de presença afirmativa de algo*, um conceito-em-ato de Rod, do plano da representação quantitativa. Faz ele com que o sujeito, ao trabalhar com o algarismo zero (0), signifique com este a presença de algo. Logo, no caso da adição, isto quer dizer que algo é acrescentado, estando ausente a idéia de que, efetivamente, o zero, como algarismo, sinaliza a ausência de qualquer elemento, de qualquer outro acréscimo no caso das realidades quantitativas em composição. Esse conceito interliga-se a outro, subjacente ao esquema de reconhecimento utilizado por Rod, o de

h) *adição de quantidade/algarismo ao signo 0 (zero), resultando neste mesmo signo 0*, fazendo-nos interpretar que, ausente a compreensão do zero como signo representativo que indica "nada" (ausência de algo), sua presença em uma operação de adição a outro algarismo anula este, do que resulta um "nada afirmativo", o próprio signo 0 (zero).

Em síntese, as realizações de Rod no recorte da tarefa de composição aditiva de números trazem evidências de alguma progressão de seus esquemas, tendo subjacente a transformação de invariantes pertinentes, dentre os quais destacamos o da composição de quantidades numéricas equivalentes, quantidades que, no processo, passam a ser vistas como compostas de parcelas.

Nesse quadro, como em JAn, evidencia-se a lenta passagem da ausência para a presença de melhor coordenação acréscimos/decréscimos, agora, não só de elementos, mas de parcelas de totais em elaboração. Porém, também é significativa, entre os esquemas prévios de Rod, a presença daqueles marcados pela mecanização, enquanto algoritmos, sobretudo na interpretação/representação de quantidades/parcelas a adicionar, tendo subjacentes invariantes de mesma ordem. Estes resistem, por vezes fortemente, a invariantes de significação correspondentes às realidades quantitativas trabalhadas.

Discussão

A análise apresentada das seqüências de aprendizagem escolhidas aponta-nos para a complexidade do processo da compreensão da adição/subtração ainda em seu plano aritmético para sujeitos como os nossos.

Vimos que, na perspectiva adotada, compreender a adição/subtração implica "trabalhar", no plano da ação concreta, vários instrumentos nocionais, relações e inferências que, pertinentes ao referido sistema conceitual, também o são ao processo psicogenético da elaboração do número. Por outra parte, a esse processo subjazem formas mais básicas do tratamento cognitivo em construção, as relativas ao processo de desenvolvimento do plano pré-operatório para o das operações concretas.

Esses planos da construção do sistema conceitual em foco expressam-se na interação de seus componentes necessários, em seus papéis específicos, mas sem que um possa reduzir-se ao outro. É por essa razão que os estádios descritos por Piaget são necessários, mas não são suficientes para compreender o desenvolvimento dessas competências complexas específicas (Vergnaud, 1989-1990; 1990b).

Os resultados mostram também o quanto as proposições de Vergnaud contribuem para melhor adentrar naqueles processos em situação de aprendizagem. A identificação e a descrição dos invariantes subjacentes aos esquemas empregados pelos sujeitos diante de tarefas-problema, como teoremas-em-ato e conceitos-em-ato, melhor revelam, não só de que relações, noções, inferências dispõem os sujeitos e em que plano de construção elas se encontram, como, sobretudo, a "trama" entre elas existente, quer como noções, quer como propriedades relacionais.

Configura-se-nos então, de modo mais preciso, que, no emprego de esquemas em elaboração pelo sujeito (elaboração esta provocada na e pela situação), os teoremas-em-ato (e necessariamente os conceitos-em-ato que os compõem) estão interligados em um contínuo de coordenações, de relações mútuas, de forma que lhes ocorram alterações progressivas interdependentes.

Essa forma de interpretar a relação entre aqueles invariantes não exclui e, ainda, dá substância ao fato de que um ou outro teorema-em-ato antecede necessariamente, na psicogênese, outros dentre os pertinentes ao campo conceitual específico. Assim, em qualquer patamar de elaboração, da presença de um antecedente vai depender o surgimento de outro, com o qual aquele vai combinar-se e recombinar-se. Logo, teríamos a interdependência dos invariantes na transformação contínua dos esquemas.

A respeito, parece-nos um bom exemplo a recorrência que, ainda elementar, foi captada e descrita como teorema-em-ato nos esquemas de composição/decomposição das coleções numéricas e de parcelas de adições de nossos sujeitos: como propriedade das relações entre ações repetidas de pôr/tirar elementos, em elaboração, ela interdepende de outro, o da bijecção, em princípio seu antecessor, pois que concerne à relação construída de cada uma daquelas ações com as alterações "a mais..., a menos", então identificadas por uma denominação numeral ou pelas expressões "mais um..., menos um".

Assim, as transformações qualitativas interdependentes dos invariantes analisados, logo, dos esquemas dos sujeitos, inscrevem-se em um movimento proativo e retroativo entre patamares sucessivos de coordenação e integração desses esquemas, peculiares ao conceito, e que o modelo do funcionamento cognitivo piagetiano da equilibração pode explicar (Piaget, 1976). Como movimento contínuo, esse processo carreia junto a necessidade de tempo para que esquemas prévios de assimilação disponíveis pelo sujeito sejam acomodados a desafios novos da realidade, resultando progressivamente em novos esquemas de assimilação dessa realidade, mais móveis às exigências de compreensão do que lhe é específico, algo a ser acionado obrigatoriamente então na aprendizagem (Brun, 1996; Vergnaud, 1981; 1989-1990).

A análise efetuada traz interessantes derivações pedagógicas: ao identificar invariantes em seus patamares de construção e prováveis interligações, ela mostra quais dentre eles devem ter a atenção do professor a cada momento do processo de compreensão do aprendiz, quais dentre eles devem e podem ser então objeto de intervenção específica e como esta deve caracterizar-se. Ela também aponta a importância de serem trabalhadas, por exemplo, a correspondência entre elementos das coleções quantitativas, a bijecção com a decorrente atribuição de quotas comuns a elementos de mesma posição e diferentes na série (Gréco, 1960). Destacamos também a relevância de ativar aqueles invariantes, tanto no sentido aditivo como no subtrativo, posto que são fortes as evidências das dificuldades dos sujeitos em sobrepor à tendência afirmativa das ações de adicionar, as ações opostas, de subtrair, relação esta presente no eixo da estruturação dessas operações em um sistema, na perspectiva adotada neste estudo.

Logo, há sentido, assim, nos itens da agenda de Brun (1996), já referida, quanto à identificação de invariantes relativos à construção dos conceitos matemáticos e de suas transformações, para que o ensino seja desafiante aos esquemas prévios dos alunos, na superação de obstáculos epistemológicos próprios da compreensão específica de cada conceito, o que desenha a necessidade de o professor intervir com adequação e propriedade específicas.

Esse tema dos obstáculos epistemológicos típicos à construção de cada conceito reporta-nos à questão das relações entre a aprendizagem de conteúdos escolares e o desenvolvimento cognitivo.

Muito do que consideramos, já neste texto, constitui-se em argumento que aponta a perspectiva adotada na análise efetuada como frutífera para melhor compreender aquela relação, que se desenha como de interdependência circular.

Captamos evidências importantes para sustentar a idéia de que a aprendizagem do conteúdo escolar focalizado faz-se em um processo que tem suas especificidades, obrigatoriamente necessitando de intervenção, o ensino. Contudo, esse processo depende também de estruturações processuais cognitivas que lhe são subjacentes, não necessariamente aprendidas na situação, mas que decorrem de organizações efetuadas a longo prazo, o desenvolvimento cognitivo.

Contudo, também para a presença dessas organizações, e em ritmo que, com reservas, chamaríamos de relativamente adequado, fazem-se também necessárias, entre outras, aquelas estruturações conceituais específicas decorrentes de um ensino que efetivamente as provoque. É bom exemplo o que vimos das ações aditivas de JAn e Rod: provocadas pelas tarefas, tornaram-se menos pregnantes em relação às subtrativas, porém, em um movimento lento em direção a compensações completas, devido a obstáculos epistemológicos evolutivos de ordem pré-operatória não imediatamente superáveis pela intervenção.

Por outro lado, algumas realizações de nossos sujeitos também indicam expressivamente o que pode ocorrer ao processo mais amplo de construções de formas cognitivas, quando há aprendizagens pontuais, de caráter mecanizado, no campo conceitual estudado: coleções compostas por formas automatizadas de controle, com interpretações de mesma ordem, os algoritmos adquiridos e utilizados sem significação em relação a realidades adicionáveis/subtraíveis. São aquisições, vimos, não fácil e imediatamente superadas por intervenções didáticas de outra ordem, o que nos permite asseverar o quanto podem, extensa e intensamente, tais aprendizagens limitar, comprometer o processo cognitivo mais amplo dos aprendizes, não só na escola, como fora dela.

Enfim, com esse quadro de argumentos, esperamos ter contribuído para que ao menos alguns dos itens da agenda de pesquisa proposta por Brun (1996) tenham sido respondidos, asseverando sua relevância aos propósitos da educação matemática.

Resumo

O estudo descreve momentos da aprendizagem da adição/subtração de dois meninos que resolveram tarefas de composição/decomposição de grandezas numéricas e de composição aditiva. Seu objetivo é o de analisar as soluções infantis segundo a teoria dos campos conceituais e as perspectivas da epistemologia do número. Os sujeitos, alunos de 1ª série do ensino público fundamental, tinham 9;1 e 8;6 anos de idade. Do registro videografado dos dados e da análise microgenética, são descritos os esquemas de solução dos sujeitos e os invariantes que lhes subjazem. É apontada a complexidade dos momentos da construção aritmética da adição/subtração descritos, traduzidos pela presença "em ato" de instrumentos nocionais, relações e inferências, em progressão interligada. A discussão privilegia a idéia da construção do conceito em situação de aprendizagem conforme sua psicogênese própria, e a da interdependência aprendizagem/desenvolvimento cognitivo.

Palavras-chave: aprendizagem construtivista; estruturas aditivas, psicogênese da adição/subtração.

Abstract

The study describes addition/subtraction learning moments of two boys, during the solution of tasks on composition/decomposition of numerical quantities and on additive composition. The analysis of the children's solutions according to the theoretical frameworks of conceptual fields and the epistemology of the number is its primary objective. Subjects were 8;6 and 9;1 years old and attended the first grade of an elementary public school. Based on videotaped data and microgenetic analysis, subjects' solving schemata are described with the invariants which are their substratum. Results point to the complexity of the arithmetical addition/subtraction construction, represented by the presence "in action" of characteristic *notional instruments, relationships and inferences, whose progressions are connected. Discussion focuses on the ideas of construction of the concept in learning situations according to its own psychogenesis; and the interdependence between learning and cognitive development.*

Key-words: *Constructivist learning; additive structures; addition/subtraction psychogenesis.*

Resumen

Este artículo describe momentos del aprendizaje de la adición y la sustracción por parte de dos niños en la resolución de tareas de composición y descomposición de cantidades numéricas y de composición aditiva. Su objetivo es analizar las soluciones infantiles según la teoría de los campos conceptuales y las perspectivas de la epistemología del número. Los sujetos, alumnos del primer año de una escuela primaria estatal, tenían 8,6 y 9 años de edad. Con base en el registro videografiado de los datos y del análisis microgenético, son descriptos los esquemas de resolución de los sujetos y las invariancias que les son subyacentes. Es destacada la complejidad de los momentos descritos de construcción aritmética de la adición y la sustracción, traducidos por la presencia "en acto" de nociones, relaciones y inferencias en progresión interconectada. El planteo privilegia la idea de la construcción del concepto en situaciones de aprendizaje según su psicogénesis específica, y la idea de la interdependencia entre aprendizaje y desarrollo cognitivo.

Palabras-clave: *Aprendizaje constructivista; estructuras aditivas; psicogenesis de la adición/substracción.*

Referências bibliográficas

Baroody, A. J. e Ginsburg, H. F. (1986). "The relationship between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic". In: Hiebert, J. (ed.). *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics*. London/Hillsdale, Lawrence Erlbaum.

Brun, J. (1996). *Constructivisme et didactique des mathématiques*. Genève, Université de Genève, Fapse (mimeo).

Brun, J.; Giossi, J. M. e Henriquès, A. (1984). À propos de l'écriture décimale. *Math-École*, v. 23, n. 112, pp. 2-11.

Falcão, J. T. da R. (1996). "Elementos para uma abordagem psicológica do desenvolvimento de conceitos científicos e matemáticos". In: Dias, M. da G. B. e Spinillo, A. G. (orgs.). *Tópicos em psicologia cognitiva*. Recife, Editora Universitária da UFPE.

Gardin, J. C. (1974). *Les analyses de discours*. Neuchâtel, Delachaux et Niestlé.

Gillièron, C. (1985). *La construction du réel chez le psychologue*. Berne, Peter Lang.

Gréco, P. (1960). "Recherches sur quelques formes d'inférences arithmétiques et sur la compréhension de l'itération numérique chez l'enfant". In: Gréco, P.; Grize, J.-B.; Papert, S. e Piaget, J. *Problèmes de la construction du nombre*. Études d'Epistémologie Génétique, vol. XI. Paris, PUF, pp. 149-213.

Gréco, P.; Grize, J.-B.; Papert, S. e Piaget, J. (1960). *Problèmes de la construction du nombre*. Études d'Epistémologie Génétique, vol. XI. Paris, PUF.

Gréco, P.; Inhelder, B.; Matalon, B. e Piaget, J. (1963). *La formation des raisonnements récurrentiels*. Études d'Epistémologie Génétique, vol. XVII. Paris, PUF.

Gréco, P. e Morf, A. (1962). *Les structures numériques elémentaires*. Études d'Epistémologie Génétique, vol. XIII. Paris, PUF.

Lerner, D. e Sadovsky, P. (1994). "O sistema de numeração: um problema didático". In: Parra, C. e Saiz, I. (orgs.). *Didática da matemática. Reflexões psicopedagógicas*. Porto Alegre, Artes Médicas.

Piaget, J. (1964). Development and learning. *Journal of Research on Science Teaching*, v. XI, n. 3, pp. 176-186.

______ (1976). *A equilibração das estruturas cognitivas*. Rio de Janeiro, Zahar.

Piaget, J. e Gréco, P. (1974). *Aprendizagem e conhecimento*. Estudos de Epistemologia Genética, vol. VII. Rio de Janeiro, Freitas Bastos (originalmente publicado em 1959).

Sinclair, A. e Scheuer, N. (1993). Understanding the written system: 6 year-olds in Argentina and Switzerland. *Educational Studies in Mathematics*, pp. 1-23 (separata).

Sinclair, A.; Tièche-Christinat, C. e Garin, A. (1994). "Comment l'enfant interprète-t-il les nombres écrits à plusieurs chiffres?". In: Artigue, M.; Gras, R.; Laborde, C. e Tavignot, P. (eds.). *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Grenoble, La Pensée Sauvage.

Sinclair, H. (1989). "Introdução". In: Sinclair, H. (org.). *A produção de notações na criança*. São Paulo, Cortez.

Sinclair, H. e Sinclair, A. (1986). "Children's mastery of written numerals and the construction of basic number concepts". In: Hiebert, J. (ed.). *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics*. London/Hillsdale, Lawrence Erlbaum.

Teixeira, L. R. M. (1996). *Aprendizagem inicial do valor posicional dos números: conceituação e simbolização.* Trabalho apresentado na "Homenagem Latino-Americana pelo Centenário de Nascimento de Jean Piaget". São Paulo, Universidade de São Paulo (mimeo).

Vergnaud, G. (1981). Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 2, n. 2, pp. 215-232.

______ (1985). *L'enfant, la mathématique et la réalité*. 3 ed., Berne, Peter Lang.

______ (1989-1990). Psichologie du développement et didactique des mathématiques. Un exemple: les structures additives. *Petit x*, n. 22, pp. 51-69.

______ (1990a). Catégories logiques et invariants opératoires. *Archives de Psychologie, "Hommage à Pierre Gréco"*, v. 58, n. 225, pp. 145-149.

______ (1990b). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, v. 10, n. 23, pp. 133-170.

______ (1991). "L'appropriation du concept de nombre: un processus de longue haleine". In: Bideaud, J.; Meljac, C. e Fischer, J. P. (éds.). *Les chemins du nombre.* Lille, Presses Universitaires de Lille.

______ (1994). "Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel". In: Artigue, M.; Gras, R.; Laborde, C. e Tavignot, P. (éds.). *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Grenoble, La Pensée Sauvage, pp. 177-191.

______ (1996). "Au fond de l 'action, la conceptualisation". In: Barbier, J. M. (dir.). *Savoirs théoriques et savoirs d'action*. Paris, PUF.

Maria Lúcia Faria Moro
Doutora em Psicologia da Educação
Professora Titular da Universidade Federal do Paraná
E-mail: mlfmoro@sul.com.br