

AVALIAÇÃO DE RISCO EM ANTECIPAÇÃO DE ENTRADA

Amaury de Souza Amaral¹

Fernando Fagundes Ferreira²

ABSTRACT

This article represents a proposal of Risk Assessment for enterprises under uncertainty conditions, inspired on theories proposed by Bouchaud and Potters (2003), when evaluations of trajectories of income revenue have direct influence on the entry (acquisition or start up) decision of entrepreneurs.

This study proposes a measure of risk less intuitive based on the behavior of a recent past by transforming the random process of a business revenue amount (risk asset) into a process based on future tendencies of a revenue, following a probabilistic form and dependent on a trajectory.

The first part of this study presents concepts and formulations for the determination of the fair price of a future contract, such as options. Hypothesis and advancements on this area considered, the general financial balance-sheet of gains of an call option seller is demonstrated, considering that it may convert, at each time, a certain quantity of risk assets into assets free of risk and vice-versa. Once a possibility is established, there is the introduction of the development of a formulation that assists the seller to minimize risks involving the operation, by means of the minimization of the variance of the general balance-sheet of gains on the maturity date of the option, in a particular process known as static hedge.

Next, there is the proposal of a mathematical contribution, based on fundamentals of static hedge for the analysis of risks in anticipation of entry in investments under uncertainty conditions. For some better understanding, it is also presented a numeric example.

Keywords: uncertainty, risk, investment, down-payment, evaluation

RESUMO

Esse artigo apresenta uma proposta de avaliação de risco de empreendimentos em condições de incerteza, inspirada nas propostas por Bouchaud e Potters (2003), em que as avaliações das trajetórias das receitas irão influenciar diretamente a decisão de entrada em um empreendimento.

O estudo propõe uma medida de risco menos intuitiva baseada no comportamento do passado recente, transformando o processo aleatório do valor da receita da empresa (ativo de

¹ Professor - Departamento de Contabilidade - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) – São Paulo - SP e Mestre em Ciência da Computação Universidade Federal do ABC (UFABC) - Santo André - SP – Brasil, Mestre em Ciências Contábeis pela PUC/SP e Doutor em Ciências Sociais pela PUC/SP; asamaral@puccsp.br.

² Professor da Universidade de São Paulo – Mestre e Doutor em Física pela Universidade de São Paulo

risco) em um processo que se baseie em tendências futuras desta receita de forma probabilística e dependente de uma trajetória.

Para isso é apresentado na primeira parte conceitos e formulações para a determinação do preço justo de um contrato futuro, como, por exemplo, opções. Consideradas as hipóteses e avanços nesta área, é demonstrado o balanço financeiro geral de ganhos do vendedor de uma opção de compra, considerando-se que este possa converter a cada instante uma quantidade de ativos de risco em ativos livres de risco e vice-versa. Estabelecida esta possibilidade, é apresentado o desenvolvimento de uma formulação que auxilia o vendedor a minimizar os riscos inerentes à operação, através da minimização da variância do balanço financeiro geral de ganhos na data da maturidade da opção, em um processo particular conhecido como static hedge.

Em seguida é proposta uma contribuição matemática, baseada nos fundamentos da ancoragem estática, para análise de riscos em antecipação de entrada em um investimento em condições de incerteza. Para um melhor entendimento, é ainda apresentado um exemplo numérico.

Palavras-chave: incerteza, risco, investimento, entrada, avaliação.

1. INTRODUÇÃO

Conforme afirma Penrose (2006), os administradores de firmas desejam maximizar lucros em longo prazo, oriundos de investimentos na própria empresa. Para ela parece haver um paradoxo entre crescer de forma bem sucedida, reinvestindo os lucros, e reembolsar seus proprietários em relação aos capitais que estes aplicaram assumindo riscos.

Ainda segundo Penrose (2006), a empresa constitui simultaneamente uma organização administrativa e um conjunto de recursos produtivos. A empresa concatena seus recursos com os recursos de terceiros, como bens e serviços, organizando-se em um ente, ou agregando energia ou ainda transformando-os para serem vendidos. A estrutura administrativa da firma é uma criação de pessoas de forma racional em que as tarefas são divididas. Já as atividades produtivas, são oportunidades buscadas pelos seus acionistas ou investidores. Mas, também, temos que pressupor que as empresas não cresçam e que os malogros sigam-se em ondas, fazendo com que empresas sigam outras em direção ao fim. No entanto, algumas sobreviverão por longos períodos.

Aduz que a competência administrativa nem sempre caminha junto com a competência empresarial. Competências administrativas podem ser entendidas como as habilidades que seus principais gerenciadorees apresentam em mobilizar recursos, tanto financeiros como de outra natureza, como mão de obra, etc. O chamado “tino comercial” pode estar presente ou não, que é a visão de oportunidade de negócios que os gerenciadorees possuem. Da competência empresarial, podemos citar a capacidade da firma de aproveitar sua energia ao máximo. Por energia, definimos como a utilização de recursos em todos o seus ciclos, como compra, venda, produção, etc.

O conjunto destes dois entes torna a firma uma construtora de ativos que, se aproveitados de forma eficiente, poderão levar o empreendimento a um crescimento de seus lucros e gerar possibilidades de expansão, normalmente objetivo de seus acionistas.

No entorno deste crescimento surge o investimento, que busca auferir os mesmos lucros derivados de seu desempenho. Os investidores, interessados em financiar a competência empresarial da firma, podem impulsionar rapidamente este crescimento. A confiança destes investidores está na crença de que as suas expectativas futuras serão saciadas pelos acréscimos de seu capital aplicado no negócio. Mas residem aí duas condições inerentes a qualquer empreendimento: o risco e a incerteza.

As decisões dos investidores se formam, principalmente, a partir da análise de três características importantes e as suas interações: irreversibilidade, incerteza e possibilidade de

adiamento de ingresso. Os estudos de investimento sob incerteza não é novo, Dixit, Pindyck & Sørensen (1999) já efetuaram estudos em que demonstram as decisões flutuando sobre condições adversas.

O estudo presente se baseou em modelos de uma opção real que a definiram como instrumento de uma flexibilização de ingresso ou saída que flutua sobre tais incertezas incorridas por esse investimento. À medida que os investidores tomam ciência das informações, em certo tempo t em evolução, uma regra de decisão é encontrada para se definir um ponto ótimo para realizar esse investimento ou abandoná-lo (DIXIT & PINDYCK, 1994) (*ibidem*, 1999).

A irreversibilidade decorre do fato do investimento, em muitas situações, ser um custo afundado, ou seja, em caso de arrependimento o valor investido não poderá ser recuperado.

Além disso, incertezas sobre o empreendimento podem acarretar dificuldades na projeção dos lucros futuros do negócio. O desempenho da receita de um empreendimento qualquer é incerto na esmagadora maioria dos casos.

A possibilidade de adiamento em muitos casos é factível. Os benefícios de esperar informação nova para subsidiar a decisão de investir podem ser grandes o suficiente para justificar adiamentos. Dessa forma, é encontrado em Arzac (2005) uma metodologia de análise matemática, através de cálculos de opções de entrada e saída, que fornecem o momento ideal de ingresso ou abandono de um negócio, considerando-se o aspecto volátil da receita. Mas nem sempre isso é possível. Considerações estratégicas podem forçar os investidores a antecipar investimentos para inibir o crescimento dos competidores efetivos ou a entrada de competidores potenciais na indústria e desempenhos aquém da expectativa podem forçar investidores a sair de um negócio antes do “momento ideal” para que o prejuízo não seja maior. Desenvolver então uma ferramenta que seja capaz de alguma forma avaliar a tendência de evolução das receitas para um futuro próximo seria algo extremamente útil.

Dessa forma, este artigo pretende fornecer o desenvolvimento de uma nova metodologia de análise de risco em antecipação de entrada, ou seja, avaliar a chance de sucesso do negócio quando este ainda não apresenta as condições que caracterizam o “momento ideal” desse ingresso.

2. A RECEITA COMO REFERÊNCIA

A utilização da receita como referência é fundamental nesse estudo, ela consta na essência de uma transação que segue a um processo de flutuações de preços do mercado, e em tese representariam um sacrifício de um ativo, norteados assim os acréscimos ou decréscimos patrimoniais desta sociedade avaliada.

Seria correto então afirmar que não necessariamente, uma Receita estaria vinculada com o sacrifício de algum ativo (reconhecimento da despesa) ?

De acordo com Hendriksen & Breda (1999), essa questão é abordada através do “Conceito de Vinculação”, pelo qual ocorre uma associação entre receita e despesa, contudo se houver o registro gradativo do lucro durante o processo operacional da empresa, esse conceito não é necessário.

Prontamente verificamos que algumas despesas estão intimamente relacionadas com a geração da receita, facilitando a sua vinculação. (Ex. Custos dos Produtos Vendidos). No entanto, outras despesas podem ocorrer antes ou após a geração da receita, até não sendo possível em alguns casos identificar claramente a sua vinculação. Ex.: Despesas com salários de vendedores, depreciação de equipamentos administrativos, despesas com garantias, etc.

A amplitude do tempo será um arcabouço teórico que Iudícibus (2004) nos trouxe e tudo indica que encaminha uma solução, a seguir reproduzimos a sua definição:

Receita é a expressão monetária, validada pelo mercado, do agregado de bens e serviços da entidade, em sentido amplo (determinado período de tempo), e que provoca um acréscimo concomitante no ativo e no patrimônio líquido, considerando separadamente a diminuição do ativo (ou do acréscimo do passivo) e do patrimônio líquido provocados pelo esforço em produzir tal receita. (idem, idem, p. 168)

Por seu turno, a Receita é definida no IAS 18 (2010, *apud* PWC, 2011) como “...o ingresso bruto de benefícios econômicos durante o período, proveniente das atividades normais de uma entidade que resultam em aumentos de seu patrimônio líquido, com exceção dos aumentos relativos a contribuições dos participantes do capital (proprietários)” (IASB, 2010, *apud* PWC, 2011, p. 21).

A discussão sobre o reconhecimento da receita será então a discussão que se segue, qual seria o momento desse reconhecimento?

O entendimento da essência de uma transação de receita é um fator crucial para esse reconhecimento, e o entendimento muitas vezes parciais das transações geram dificuldades no processo do quanto e de quanta receita reconhecer (PWC, 2011, p. 25).

Se tomarmos a premissa de que a obtenção de resultado é um processo contínuo, então a receita deveria ser reconhecida continuamente, durante todo o ciclo do produto. Na prática, não é isto que acontece. Em função dessa criticidade o IAS 18 (IFRS, 2010) definiram certas condições como regra de evidenciação nos procedimentos de apropriação das receitas.

A receita deverá ser mensurada pelo chamado “valor justo” da consideração recebida ou a receber. Define-se valor justo aquele pelo qual um ativo poderia ser permutado ou um passivo liquidado, entre partes esclarecidas, e dispostas em transação entre elas, com independência e isenção de interesses. A substância econômica da transação contratada deve ser conhecida por ambas partes.

No IAS 18 (IFRS, 2010), há a diferenciação entre receitas oriundas da venda de bens, receita de prestação de serviços e receita de utilização, por outros, de ativos da entidade, e cada uma das diferenciações seguem princípios específicos para o reconhecimento da receita.

No primeiro caso, a receita de venda de bens, há o reconhecimento quando: a entidade transfere ao comprador a totalidade dos riscos e benefícios da propriedade de determinado bem; o valor da receita pode ser mensurado com fidedignidade; da probabilidade de que os benefícios econômicos relacionados derivados da transação sejam todos revertidos para a entidade; também quando os custos da venda incorridos ou que vierem a incorrer podem ser mensurados com confiança; por último, quando a entidade não manteve um grau de gerenciamento contínuo associado à propriedade ou ao controle do bem vendido.

O segundo caso, referente à receita de prestação de serviços, a receita deve ser reconhecida somente na etapa de finalização da transação na data do balanço patrimonial. O Resultado dessa transação só pode ser calculado com confiança quando: o valor da receita puder ser mensurado com confiança; da probabilidade de que os benefícios econômicos relacionados derivados da transação sejam todos revertidos para a entidade; também quando os custos da venda incorridos ou que vierem a incorrer podem ser mensurados com confiança; e quando o estágio de finalização da transação na data do balanço puder ser mensurado com confiança.

O terceiro e último caso, a receita da utilização, por outros, dos ativos da entidade que gerem juros, royalties e dividendos, deve ser reconhecida quando: da probabilidade de que os benefícios econômicos relacionados derivados da transação sejam todos revertidos para a entidade e quando o valor da receita puder ser mensurado com confiança.

Por fim, deve-se observar que a receita é parte integrante do lucro, ou seja, é o ente positivo que se soma ao lucro, excetuando-se os ganhos de capital.

De forma rápida podemos conceituar o lucro como a resultante entre a receita e despesas da entidade. Para Hendriksen & Breda (1999) conceitua despesa como: “definidas mais precisamente, as despesas constituem o uso ou consumo de bens e serviços no processo de obtenção de receitas” (idem, idem, p. 233).

Encontramos no framework do IASB (2010, *apud* PWC, 2011) a definição de lucro como:

.... aumentos dos benefícios econômicos durante o período contábil, na forma de ingressos ou melhorias de ativos ou diminuições de passivos que resultam em aumentos do patrimônio líquido, com exceção daqueles relativos a contribuições dos participantes do capital (proprietários). (IASB, 2010, *apud* PWC, 2011, p. 21)

A correlação entre despesa e a receita reconhecida em um período pode ser tão dimuta ou ampla variando de acordo com as condições de relacionamento entre elas. O caso mais patente disso é o CPV, que é um custo de período; logo é uma despesa estritamente relacionada, na acepção do termo. Contudo existem despesas que são facilmente atribuíveis a receita, que o caso de uma despesa de propaganda por exemplo.

3. A AVALIAÇÃO DE UMA ENTIDADE

Não se sabe ao certo quão próximo a entidade estaria entre uma linha de continuidade e descontinuidade, uma vez que o mercado, o seu produto e administradores podem influenciar e afetar a continuidade da mesma. Além disso, os ativos no futuro, não necessariamente trariam os mesmos benefícios gerados no seu passado, trazendo ao investidor esta incerteza quanto à realização do mesmo.

Segundo Dixit & Pindyck (1999), a decisão de se realizar ou não um investimento em qualquer empreendimento considera duas características importantes: (1º) a irreversibilidade, ou seja, o fato de que o investimento é um custo afundado, de modo que o investidor não consegue recuperá-lo totalmente em caso de arrependimento (na maioria dos casos); (2º) a possibilidade de adiamento da decisão de investir.

Essas características, juntamente com a incerteza sobre o futuro, fazem com que a oportunidade de investimento seja análoga a uma opção financeira. Na presença de incerteza,

uma firma, com uma oportunidade de investimento irreversível, carrega uma opção³, ou seja, tem o direito – mas não a obrigação – de comprar um ativo (o projeto) no futuro, a um preço de exercício (o investimento). Quando a firma investe, ela exerce essa opção de investir. Esse valor pode ser bastante elevado, e regras de investimentos que o ignoram, como VPL⁴ e TIR⁵, podem conduzir a erros significativos.

A possibilidade de adiamento do investimento em muitos casos é factível. Os benefícios de se esperar novas informações para subsidiar a decisão de investir podem ser grandes o suficiente para justificar adiamentos. Mas nem sempre isso é possível. Considerações estratégicas podem forçar os investidores a antecipar investimentos para inibir o crescimento dos competidores efetivos ou a entrada de competidores potenciais na indústria. São nestes casos de impossibilidade de adiamento e incerteza sobre valores de variáveis relevantes que este trabalho pretende focar.

Quando em um investimento não existir a opção de se adiar a entrada, a decisão de investir será positiva se o valor presente $V(R)$ de o empreendimento exceder os custos de aquisição e/ou investimento. Este não será necessariamente o caso quando for possível o adiamento da decisão.

Na visão de Arzac (2005) uma abordagem matemática para o cálculo do valor da opção de entrada, como o valor de uma empresa⁶, é estabelecida. Nesta abordagem, o valor de um empreendimento é calculado em função de sua receita gerada, obtida a partir do processo de Ito⁷, que fornece um movimento browniano ao longo do tempo como padrão para o comportamento da receita.

A decisão de adiar ou iniciar imediatamente o empreendimento é feita da seguinte forma: considere o custo de aquisição de um empreendimento como sendo I e seu valor presente como sendo $V(R)$. O método de análise do Valor Presente Líquido diz que o empreendimento deve ser iniciado se $V(R) > I$.

Como a receita, em tese, obedece a um processo aleatório, é possível que no futuro o valor $V(R)$ caia, de forma que o VPL em um dado instante passa a ser negativo. Neste caso, o

³ Vide Copeland, Koller & Murrin (2002) e Damodaran (2005).

⁴ VPL Valor Presente Líquido verificável em qualquer livro de finanças para maiores detalhes

⁵ TIR Taxa Interna de Retorno verificável em qualquer livro de finanças para maiores detalhes

⁶ Outros autores também trabalham com essa teoria de precificação de uma empresa por associação a uma opção de entrada. Veja mais detalhes em Damodaran (2005) e Copeland, Koller & Murrin (2002)

⁷ O lema de Ito é um procedimento de cálculo para uma encontrar a diferencial de uma função, em um processo estocástico, em que se trabalha com várias variáveis.

melhor é aguardar e esperar que a receita atinja um valor R_h tal que este risco seja minimizado. O valor de R_h é calculado através do valor da opção de entrada $F(R)$. De acordo com a teoria, a entrada no empreendimento é ideal quando $V(R) > I + F(R)$. Então R_h será o valor em que $V(R_h)$ é igual a $I + F(R)$. Os métodos de cálculo de $V(R)$ e $F(R)$ são mostrados em [Arzac, 2005].

Dessa forma, se o valor presente $V(R)$ for menor que $I + F(R)$, a teoria diz que o melhor é esperar até que a receita atinja um certo valor R_h .

3.1 AVALIAÇÃO DE RISCOS

Para o desenvolvimento deste trabalho, serão utilizados os conceitos de avaliação e minimização de riscos propostos em Bouchaud & Potters (2003) para casos simples de contratos futuros, como opções de compra. Estes contratos ocorrem através da compra ou venda de uma certa quantidade de ativos X (o ativo subjacente) com pagamento e entrega em um instante futuro $T=N\tau$, sendo:

T – instante futuro definido por:

τ - intervalo de tempo mínimo (1 dia, 1 semana, 1 mês, etc);

N – número natural que identifica a data final do contrato futuro.

A opção de compra de um ativo nada mais é que o direito do comprador da opção de compra adquirir no instante futuro $T=N\tau$ o ativo por um preço x_s , denominado preço de exercício. Se x_N , que representa o valor do ativo x no instante $T=N\tau$ for maior que x_s , o comprador da opção de compra exerce seu direito e realiza um lucro $x_N - x_s$. Para obter esse direito, o comprador da opção de compra paga um prêmio C ao vendedor da opção de compra, possuidor do ativo. Se no instante futuro $T=N\tau$ o preço x_N for menor que x_s , o comprador da opção não realiza seu direito e realiza um prejuízo C , valor do prêmio pago ao vendedor da opção.

3.2 O STATIC HEDGE

Conforme Bouchaud&Potters(2003, p. 14), uma metodologia de *hedge* é proposta ao vendedor da opção. A ancoragem de valores se caracteriza pela compra de uma certa quantidade de ativos para o hedge no instante $t = 0$, sendo que esta quantidade não se alterará até a data de expiração do contrato. Este caso pode acontecer quando os custos de transação forem extremamente elevados e, dessa maneira, a mudança da quantidade ϕ_k durante o período do contrato torna-se inviável. Além disso, assume-se que a taxa de juros livre de risco seja nula ($\rho = 0$). O balanço geral de ganhos será então:

$$\Delta W = C - \max(x_N - x_s, 0) + \phi \sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k \quad (2.1)$$

sendo:

ΔW = variação de ganhos do vendedor ao final do contrato;

C = prêmio pago pelo comprador da opção;

$\max(x_N - x_s, 0)$ = máximo valor entre $x_N - x_s$ e 0 (possível prejuízo do vendedor da opção);

ϕ_k = quantidades de ativo para o hedge;

δx_k = variação do valor do ativo x em cada instante k .

Para o caso em que o retorno médio é zero ($\langle \Delta x_k \rangle = 0$) e que os incrementos sejam não-correlacionados (i.e., $\langle \Delta x_k \cdot \Delta x_l \rangle = D \tau \Delta_{k,l}$), a variância do ganho final ($R^2 = \langle \Delta W^2 \rangle - \langle \Delta W \rangle^2$) fica então:

$$R^2 = ND \tau \phi^2 - 2\phi \langle (x_N - x_s) \max(x_N - x_s, 0) \rangle + R_0^2 \quad (2.2)$$

onde R_0^2 representa o risco intrínseco, associado à opção não hedgeada ($\phi = 0$):

$$R_0^2 = \langle \max(x_N - x_s, 0)^2 \rangle - \langle \max(x - x_s, 0) \rangle^2 \quad (2.3)$$

A demonstração de (2.2) e (2.3) pode ser conferida em (Chandrasekhar, 1943). De acordo com a equação (2.2), a função do risco a ser minimizado é uma equação do segundo grau em função de ϕ . Como o coeficiente que multiplica o termo ϕ^2 é positivo, então esta função apresenta um valor mínimo. Para se calcular este valor mínimo, basta derivar a equação uma vez em relação a ϕ e igualar a expressão a zero. Realizando-se esta operação, obtém-se que:

$$\left. \frac{dR}{d\phi} \right|_{\phi=\phi^*} = 0 \quad , \quad (2.4)$$

$$\phi^* = \frac{1}{D \tau N} \int_{x_s}^{\infty} (x - x_s)(x - x_0) P(x, N | x_0, 0) dx$$

No caso em que a probabilidade $P(x, N | x_0, 0)$ for uma Gaussiana (que se torna uma melhor aproximação à medida que $N=T/\tau$ aumenta), pode-se escrever:

$$\frac{1}{DT} \int_{x_s}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi DT}} (x - x_s)(x - x_0) \exp\left[-\frac{(x - x_0)^2}{2DT}\right] dx = - \int_{x_s}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi DT}} (x - x_s) \frac{\partial}{\partial x} \exp\left[-\frac{(x - x_0)^2}{2DT}\right] dx \quad (2.5)$$

Resolvendo esta integral por partes obtém-se:

$$\phi^* = \int_{x_s}^{\infty} P(x, N | x_0, 0) dx \quad (2.6)$$

calculada no instante $t = 0$. Ou seja, a expressão de ϕ^* calculada em $t = 0$ fornece também a probabilidade de que o valor $x(T)$ seja maior que x_s no instante $T = N\tau$ da maturidade, no momento em que $t = 0$. Por exemplo, se para uma determinada opção de compra envolvendo uma quantidade de 10 ativos de um mesmo tipo, o cálculo de ϕ^* fornecer um valor igual a 0.6, significa que se deve ter mais 6 unidades do mesmo ativo para que o hedge possa minimizar o risco no instante da maturidade da opção.

4. ANÁLISE DE RISCO EM ANTECIPAÇÃO DE ENTRADA

Em decisões de investimento, quando não houver a possibilidade de adiamento, a decisão de investir deve ser positiva se o Valor Presente Líquido (VPL) do investimento na empresa for maior que o seu retorno.

Agora, suponha o caso em que o VPL de um determinado empreendimento é menor que o investimento a ser realizado, mas tanto o vendedor quanto o comprador acreditam, por algum motivo, na possibilidade de crescimento do negócio, mas o contrário também pode acontecer, ou seja, taxa de crescimento negativo das receitas. Esta situação pode ser representada por um valor da volatilidade da receita que possibilite que o empreendimento assuma valores bem acima ou bem abaixo dos valores atuais em curto ou médio prazo. Assim, a taxa de crescimento esperada será zero.

Dessa forma, a proposta que aqui se faz é a de analisar a evolução do risco em antecipação de entrada, ou seja, quando Valor Presente Líquido da empresa for menor que o investimento I a ser realizado.

4.1 CONDIÇÕES PARA APLICAÇÃO DO *STATIC HEDGE* NA AVALIAÇÃO DE RISCOS EM ANTECIPAÇÃO DE ENTRADA

Para o desenvolvimento matemático a seguir, é necessário que algumas considerações sejam feitas. Como a receita de um empreendimento apresenta as mesmas propriedades aleatórias do ativo subjacente da opção (Damodaran, 2005), pode-se substituir o preço do ativo subjacente X na equação:

$$\Delta W = C - \max(x_N - x_s, 0) + \phi \sum_{k=0}^{N-1} \Delta x_k \quad (2.7)$$

pelo valor da receita R . Obtém-se então:

$$\Delta W = C - \max(R_N - R_l, 0) + \phi \sum_{k=0}^{N-1} \Delta R_k \quad (2.8)$$

sendo:

R_N = valor da receita no instante T da maturidade da “opção”;

ΔR_k = variação da receita no instante k ;

R_l = valor de receita mínimo de retorno do investimento em $t = n\tau$.

C_0 = valor do prêmio da opção. Para o nosso caso $C_0 = 0$.

O preço de exercício x_s é substituído pela receita R_l . O instante de maturidade $T = N\tau$ pode ser entendido como a data limite máxima na qual o investidor espera que a receita R atinja o valor de receita R_l .

De acordo com a proposta do *static hedge* em Bouchaud & Potters (2003, p. 14) a variação Δx a cada instante de tempo, em média, é igual a zero, o que vai ao encontro às hipóteses do problema. Então, a taxa de crescimento esperada será nula. Dessa forma, sobre a receita, a única informação disponível será sua volatilidade.

4.2 METODOLOGIA

A proposta é avaliar o risco da antecipação de entrada através da tendência de evolução da receita, a partir de um certo instante $t = 0$, com vistas em um instante futuro $T = N$ pré-determinado. Segundo o processo de Markov (*apud* Ether&Kurtz, 2005), no qual a evolução da receita se enquadra, somente o estado atual é relevante no momento de predizer o estado futuro. Não é difícil imaginar que no caso de receitas de um empreendimento esta afirmação não seja satisfatória. Informações sobre um passado recente podem ser relevantes para predições em estados futuros próximos, ou não tão distantes (médio e curto-prazo).

A proposta do hedge proposta na equação (2.4) é indicada para os casos (no contexto de mercado financeiro) em que os custos de transação apresentam valores elevados. Além disso, considera também a taxa de juros livre de risco igual a zero. Estas hipóteses se adequam bem para a análise de evolução de receita, já que a taxa de juros livre de risco e “custos de transação” não afetam o comportamento de receitas de forma direta, uma vez que os seus custos ora precificados contemplariam, através das receitas, tais expectativas..

Suponha então que um investidor calcule no instante $t = 0$ o valor de $\phi^*(0)$ de acordo com a equação (2.4). Para isso, a única informação necessária é a volatilidade e o valor da receita em $t = 0$. Além disso, é necessário estabelecer uma data limite no futuro (idêntico ao tempo de maturidade da opção). É considerado também que a probabilidade $P(R, N | R_0 | 0)$ é uma Gaussiana de média zero e variância igual a $(\sigma^2 R_k^2)(N - k)$, onde σ é a volatilidade da receita.

Considerando-se as hipóteses anteriores, obtém-se que:

$$\phi^* = \int_{R_i}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi DT}} \exp\left[-\frac{(R - R_0)^2}{2DT}\right] dR \quad (2.9)$$

Pode-se ainda generalizar esta expressão para qualquer instante $t = i$, para $i > 0$. Dessa forma, a equação anterior pode ser escrita da seguinte forma:

$$\phi^*(i) = \int_{R_i}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi D(N-i)\tau}} \exp\left[-\frac{(R - R_i)^2}{2D(N-i)\tau}\right] dR. \quad (2.10)$$

Os valores de $\phi^*(i)$, calculados a cada instante i , representam a **probabilidade no instante i de que a receita em $T = N\tau$ seja maior que R_i** . A proposta então é avaliar a **evolução da probabilidade** de que a receita seja maior que R_i em um determinado instante T e a variância deste processo, ou seja, o risco envolvido.

Considerando-se um intervalo de tempo de $t = 0$ até $t = k$, com $k < N$, em que as informações sobre os valores de receitas em cada um destes instantes estejam disponíveis. Considerando uma volatilidade σ constante e conhecida, é possível calcular a variância de $\phi^*(t)$ ao longo do intervalo de tempo $[0, k]$, através da seguinte equação:

$$\sigma_{\phi^*}^2(k) \equiv \langle \phi^{*2} \rangle - \langle \phi^* \rangle^2 \quad (2.11)$$

O valor médio $\langle \phi^* \rangle$ é definido da seguinte forma:

$$\langle \phi^* \rangle \equiv M(k) \equiv \sum_{i=0}^k \frac{\phi_i^*}{k+1} \quad (2.12)$$

Assim, temos que:

$$\langle \phi^* \rangle^2 \equiv [M(k)]^2 \equiv \left[\sum_{i=0}^k \frac{\phi_i^*}{k+1} \right]^2 \quad (2.13)$$

$$\langle \phi^{*2} \rangle \equiv \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \frac{1}{2\pi D(N-i)\tau} \int_{R_i}^{\infty} dR \int_{R_i}^{\infty} dy \exp\left[-\frac{(y-R_i)^2}{2D(N-i)\tau}\right] \exp\left[-\frac{(R-R_i)^2}{2D(N-i)\tau}\right] \quad (2.14)$$

Dessa forma, subtraindo-se do resultado da equação (2.14) o resultado da equação (2.13), obtém-se o valor de $\sigma_{\phi^*}^2(k)$. O cálculo da equação (2.14) pode ser realizado através da utilização de tabelas dos valores da função erro calculada para aqueles limites da integral. Assim, torna-se possível desenhar um gráfico da evolução de $\phi^*(t)$ ao longo do intervalo de tempo considerado. Além disso, a evolução da variância de $\phi^*(t)$, ao longo do intervalo de tempo, fornece uma medida do risco de que a probabilidade mais recente calculada se confirme ou não.

4.3. EXEMPLO

Considere os seguintes parâmetros para uma empresa, de acordo com a abordagem proposta no capítulo 8 de Arzac (2005):

Margem de lucro (b) = 0,3

Custo fixo (a) = -\$ 20,00 milhões

Taxa de crescimento esperado (α) = 0 (por hipótese)

CMePC (ω) = 4%

Taxa de Imposto (τ) = 40%

Custo de débito (r_d) = 5,5%

Taxa de juros livre de risco (r_f) = 7%

Volatilidade = 20%

Receita no presente = \$ 100,00 milhões

Investimento (I) = \$460,00 milhões (valor exigido para a venda da empresa)

Aplicando-se a equação desenvolvida nesse mesmo capítulo 8, que determina o valor da empresa, é obtido o seguinte valor para a empresa:

$$V(R_0) = \frac{bR_0}{(\omega-\alpha)} + \frac{a}{(1-\tau)rd}$$

$$\rightarrow V(R_0) = \$148,9 \text{ milhões}$$

Por algum motivo, o comprador acreditava que esta empresa apresentaria taxas de crescimento elevadas, que no momento da compra eram incertas. O objetivo então é estabelecer qual a probabilidade de que a empresa em 4 anos (tempo arbitrado pelo comprador) retorne o investimento, sendo que 2,5 anos já se passaram e, portanto, encontram-se disponíveis informações sobre as receitas neste período.

Para isso, é calculado o custo de oportunidade do investimento em 4 anos:

$$T = 4 \text{ anos} \rightarrow I(1+r_f)^4 = 607,84 \rightarrow R_T = \$ 160 \text{ milhões}$$

Para que a o investimento seja recompensado é necessário então que a receita em $T = 4$ anos seja maior que \$ 160,00 milhões. Logo, qual a probabilidade disto acontecer?

Receitas mês a mês:

Mês	Receita	Mês	Receita	Mês	Receita
0	\$100,00	11	\$141,00	21	\$127,00
1	\$100,00	12	\$144,00	22	\$119,00
2	\$105,00	13	\$154,00	23	\$130,00
3	\$113,00	14	\$149,00	24	\$115,00
4	\$122,00	15	\$145,00	25	\$120,00
5	\$132,00	16	\$148,00	26	\$115,00
6	\$136,00	17	\$145,00	27	\$105,00
7	\$150,00	18	\$135,00	28	\$109,00
8	\$146,00	19	\$135,00	29	\$110,00
9	\$150,00	20	\$130,00	30	\$100,00
10	\$150,00				

(tabela simulando a evolução das receitas de uma empresa – fonte : Autor)

1º passo: Cálculo das variâncias

→ A partir dos dados das receitas em cada instante i , calcular a variância para todos intervalos de tempo $T - i$, com i assumindo valores de 0 até k . ($k = 2,5$ anos = 30 meses)

$\sigma = 20\%$			$T = 4$ anos			$\sigma_i^2 = \sigma^2 R_i^2 (T - i)$		
Mês i	Receita	Variância	Mês i	Receita	Variância	Mês i	Receita	Variância
0	\$100,00	1600	11	\$141,00	2451,99	21	\$127,00	1451,61
1	\$100,00	1566,667	12	\$144,00	2488,32	22	\$119,00	1227,287
2	\$105,00	1690,5	13	\$154,00	2766,8667	23	\$130,00	1408,333
3	\$113,00	1915,35	14	\$149,00	2516,1133	24	\$115,00	1058
4	\$122,00	2182,987	15	\$145,00	2312,75	25	\$120,00	1104
5	\$132,00	2497,44	16	\$148,00	2336,4267	26	\$115,00	969,8333
6	\$136,00	2589,44	17	\$145,00	2172,5833	27	\$105,00	771,75
7	\$150,00	3075	18	\$135,00	1822,5	28	\$109,00	792,0667
8	\$146,00	2842,133	19	\$135,00	1761,75	29	\$110,00	766,3333
9	\$150,00	2925	20	\$130,00	1577,3333	30	\$100,00	600
10	\$150,00	2850						

(tabela simulando a evolução das receitas de uma empresa e a respectiva variância – fonte : Autor)

2º passo: Cálculo de ϕ_i^*

→ Para cada instante i , calcular o valor de $\phi^*(t=i)$, sendo $\phi_i^* = \int_{R_i}^{\infty} P(R_T, T | R_i, i) dR$.

Para o caso em que a probabilidade de R_T em T possa ser descrita por uma gaussiana (Feller, 1971), o valor de ϕ_i^* será dada pela seguinte expressão:

$$\phi_i^* = \int_{R_i}^{\infty} \frac{\exp\left[-\frac{(R - R_i)^2}{2\sigma_i^2}\right]}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} dR \quad (2.15)$$

Como não é possível determinar o valor desta integral de forma analítica, este cálculo é feito através do uso de tabelas de função erro fornecidas em anexo.

A função erro de x ($\text{erf } x$) é definida da seguinte forma:

$$\text{erf } x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (2.16)$$

Substituindo-se a variável t por $(R - R_i)/\sqrt{\sigma_i^2}$ teremos exatamente a forma da integral de ϕ_i^* , a não ser pelos limites de integração.

$$\text{erf } x_i = 2 \int_0^{x_i} \frac{\exp\left[-\frac{(R - R_i)^2}{2\sigma_i^2}\right]}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} dR, \quad \left(t = \frac{R - R_i}{\sqrt{2\sigma_i^2}} \Rightarrow dt = \frac{dR}{\sqrt{2\sigma_i^2}} \right) \quad (2.17)$$

Para saber o valor de x_i correspondente a ϕ_i^* , basta fazer:

$$x_i = \frac{R_i - R_i}{\sqrt{2\sigma_i^2}} \rightarrow \text{erf } x_i \text{ tabela.} \quad (2.18)$$

O valor de ϕ_i^* será então dado pela seguinte expressão:

$$\phi_i^* = 0,5 - \frac{\text{erf } x_i}{2} \quad (2.19)$$

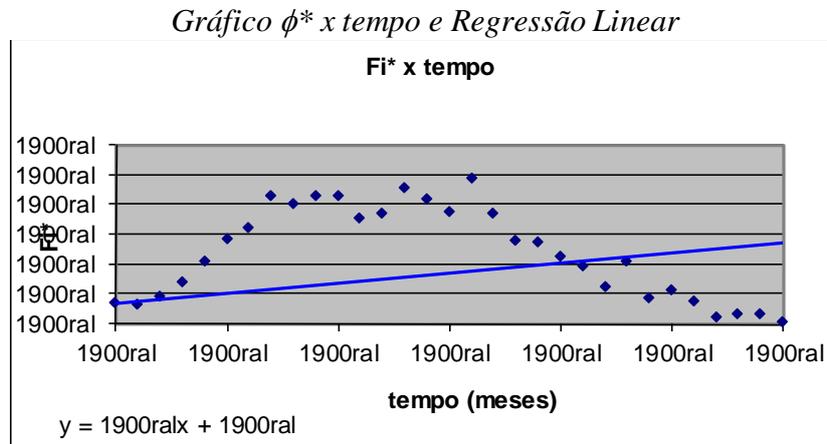
Mês i	x_i	$\phi^*(t=i)$	Mês i	x_i	$\phi^*(t=i)$	Mês i	x_i	$\phi^*(t=i)$
0	1,06066	0,0687819	11	0,27131841	0,351291	21	0,612455	0,194159
1	1,071884	0,0651134	12	0,22680461	0,372489	22	0,827553	0,123095
2	0,945889	8,96%	13	0,08065701	0,454961	23	0,565267	0,210092
3	0,759379	0,1412316	14	0,15506457	0,416002	24	0,978261	0,085065
4	0,5751	0,2100921	15	0,22055247	0,377852	25	0,851257	0,114666
5	0,396183	0,2858038	16	0,17554569	0,489953	26	1,02176	0,074581
6	0,333498	0,3203607	17	0,22755587	0,372489	27	1,39994	0,023857
7	0,127515	0,4270664	18	0,41408666	0,281015	28	1,281369	0,035133
8	0,185691	0,3995321	19	0,42116558	0,276266	29	1,277162	0,035133
9	0,130744	0,4270664	20	0,53412698	0,226768	30	1,732051	0,007211
10	0,132453	0,4270664						

(tabela simulando a evolução das receitas de uma empresa e o respectivo risco ϕ_i^* – fonte :Autor)

3º passo: Gráfico de ϕ_i^* x tempo:

Através dos dados da tabela anterior, plota-se o gráfico de $\phi^*(t=i)$ pelo tempo e estima-se a tendência de crescimento de ϕ^* , que é idêntica à estimativa do crescimento da receita. Como a receita pode ser representada por um movimento browniano geométrico (Arzac, 2005), que é descrito por uma reta $\alpha R dt$, que representa a tendência de crescimento da receita, e por

uma componente aleatória representada por σRdz ($dz = \varepsilon_i dt^{1/2}$, “processo de Wiener”) que caminha em torno da reta de crescimento esperado, a estimativa desta reta, que nos fornece os valores esperados da receita, pode ser feita através da obtenção da regressão linear dos pontos do gráfico, garantindo que em $t = 0$ a regressão linear passe pelo valor de $\phi^*(0)$ em $t = 0$.



No gráfico acima, a equação $y = 0,0067x + 0,0688$ representa a regressão linear para os pontos acima, com y representando os valores de $\phi^*(t=i)$ e x representando o tempo.

Dessa forma, pode-se calcular o valor esperado de $\phi^*(T)$ com $T = 4$ anos.

$$E[\phi^*(T = 4 \text{ anos})] = 0,0067.48 + 0,0688 \rightarrow E[\phi^*(T)] = 0,3904$$

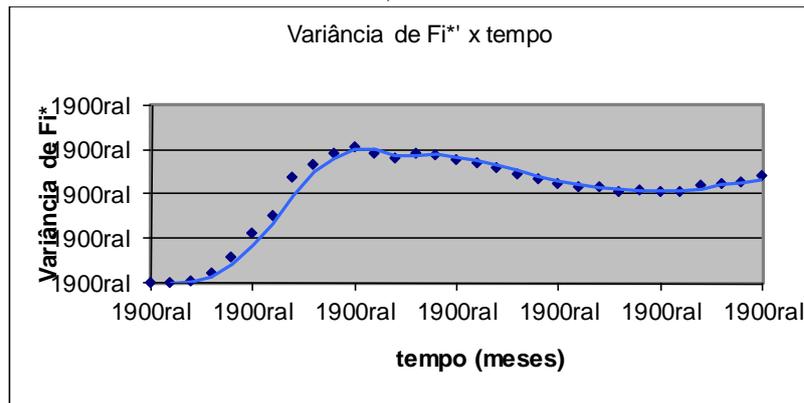
Ou seja, a probabilidade de que a receita em T seja maior que \$160,00 é de 39,04 %.

4º passo: Avaliação do risco

Como medida de risco, será utilizada a proposta de Bouchaud & Potters (2003) que considera a variância dos processos como uma medida de risco. Para isso é calculada a variância da evolução de ϕ^* ao longo do tempo, segundo as definições das equações (2.11) a (2.14). Os resultados para este exemplo são mostrados na tabela e no gráfico a seguir:

Mês i	$\sigma_{\phi^*}^2$	Mês i	$\sigma_{\phi^*}^2$	Mês i	$\sigma_{\phi^*}^2$
0	0	11	0,01961	21	0,016144
1	3,36E-06	12	0,01888	22	0,016794
2	0,000116	13	0,019661	23	0,016386
3	0,000922	14	0,01936	24	0,017375
4	0,003001	15	0,018532	25	0,017764
5	0,006555	16	0,019395	26	0,01857
6	0,009451	17	0,018502	27	0,019989
7	0,015571	18	0,017591	28	0,020997
8	0,017734	19	0,016781	29	0,021829
9	0,019706	20	0,016317	30	0,022903
10	0,0207				

tabela simulando a evolução $\sigma_{\phi^*}^2$ – fonte :Autor)

Gráfico de $\sigma_{\phi^*}^2(k)$ x tempo


Pelo gráfico acima, nota-se que a variância a partir do mês 20 retoma uma tendência de crescimento, ou seja, aumenta-se o risco da medida de ϕ^* . Este acontecimento em particular deve-se à queda da receita a partir do mês 20. Ou seja, o risco voltou a aumentar após uma tendência de queda da receita. No instante $t = 30$ meses a variância de ϕ^* apresentava um valor igual a 0,00125. Dessa forma, o desvio-padrão da medida da probabilidade nesse momento vale 3,53%. *Isto sugere que a probabilidade de 39% de que a receita seja maior que \$160,00 é confiável.*

5. CONCLUSÃO

Em decisões de investimentos, o investidor normalmente se depara com um conjunto de incertezas como, por exemplo, o comportamento aleatório da receita, a concorrência de outros competidores, etc. É nessa situação que decisões devem ser tomadas para a aplicação dos recursos e minimização dos riscos. O adiamento do ingresso em um negócio pode acarretar a perda de mercado por conta da entrada de potenciais concorrentes. Contudo, ao se antecipar uma entrada, sempre existirá o risco da realização de um mau negócio.

As decisões de investimentos não seguem apenas regras matemáticas. Os investidores normalmente se valem de alguma informação mais significativa para atingir o grau de confiança desejado e, assim, acabam por “apostar” no negócio. Isto ocorre devido ao conjunto de incertezas sobre o futuro que qualquer negócio possui intrinsecamente. Essas incertezas tornam a aplicação de técnicas matemáticas de decisão limitadas e, inevitavelmente, sempre ao se ingressar em um negócio o investidor estará correndo riscos. Dessa forma, cada empreendedor desenvolve suas “regras de decisão” baseadas na sua própria visão estratégica e fundamentadas também nas técnicas já mencionadas.

Esse estudo apresenta uma abordagem matemática em análise de risco em antecipação de entrada, que se espera ser útil aos interessados, tanto no meio acadêmico, para o desenvolvimento de novas idéias, quanto para o meio empresarial, como instrumento de avaliação em decisão de investimentos.

6. REFERÊNCIAS

- ABRAMOWITS, M.; STEGUN, I. A.; *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, John Wiley & Sons, 10.ed., 1972.
- ARZAC, E. R., *Valuation for Megers, buyouts, and Restructuring*, John Wiley & Sons, Inc., 2005
- BOUCHAUD, J. P.; POTTERS, M.; *Theory of Financial Risks*, Cambridge University Press, 2 ed., 2003.
- BOUCHAUD, J. P.; SORNETTE, D.; *J. Phys. I France* 4, 863 (1994)
- CHANDRASEKHAR, S. *Stochastic problems in physics and astronomy*, Reviews of Modern Physics, Vol. 15, No1, Apêndice 4: "The mean and the mean square deviation of the sum of two probability distributions", 1943
- COPELAND, T.; KOLLER, T.; MURRIN, J.; *Avaliação de Empresas – Valuation: Calculando e Gerenciando o Valor das Empresas*, 3.ed., Makron Books, 2002.
- DAMODARAN, A.; *Avaliação de Investimentos – Ferramentas e Técnicas para a Determinação do Valor de Qualquer Ativo*. 7ª Reimpressão, Qualitymark Editora, 2005.
- DIXIT, Avinash. K.; PINDYCK, Robert. S.; *Investment Under Uncertainty*, Princeton University Press, 1994.
- DIXIT, Avinash K., PINDYCK, Robert S. and SODAL, Sigbjorn. "A markup interpretation of optimal investment rules." *The Economic Journal* 109.455 (1999): 179-189.
- ETHER, S. N.; KURTZ, T. G.; *Markov Processes – Characterization and Convergence*, John Wiley & Sons, 2005.
- FELLER, W.; *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, John Wiley & Sons, Inc., 2.edição., 1971.
- HENDRIKSEN, E. S.; *Accounting Theory*. Irwin-Dorsey Georgetown Ontario, 1999.
- INTERNATIONAL ACCOUNTING – STANDARDS BOARD, *Normas Internacionais de Contabilidade*, IBRACON – Instituto de Auditores Independentes do Brasil, 2001.
- IASB – International Accounting Standards Board. IFRS: Consolidated without early application. London: IFRS, 2010.
- IUDÍCIBUS, S.; *Teoria da Contabilidade*, Editora Atlas S.A., 7.ed., 2004.
- PENROSE, E.; *Teoria do Crescimento da Firma*, 1.ed., Editora Unicamp, 2006.