

## **CARACTERIZAÇÃO DO MERCADO ACIONÁRIO BRASILEIRO POR MEIO DOS CÁLCULOS DE ENTROPIA, MUTUAL INFORMATION E A COMPLEXIDADE DE LEMPEL-ZIV**

Vinicius Henrique Pinto Pacheco<sup>1</sup>

Antonio Fernando Crepaldi<sup>2</sup>

### **RESUMO**

Podemos descrever os mercados financeiros como um Sistema Complexo, e a aplicação de conceitos de áreas como da Econofísica e da Teoria da Informação fornecem bases para a compreensão de suas características e padrões. Desta forma, buscou-se por meio dos cálculos da Entropia, Mutual Information (MI) e da Complexidade de Lempel-Ziv (CLZ) caracterizar de forma empírica séries de retornos diários de ações da Bolsa de Valores de São Paulo entre 2014 e 2018. Dos resultados, viu-se que os dias mais entrópicos da série foram também os de variações de log retornos e de volume do Ibovespa consideravelmente superiores à sua média diária, reforçando o fato de que esses configuram-se como dias de menor redundância e maior conteúdo informativo. Para MI, os clusters mostraram-se mais delimitados que os encontrados via Correlação de Pearson. Em CLZ, a baixa variabilidade das substrings demonstram uma série com padrões cíclicos e de baixa complexidade.

**Palavras-chaves:** Sistemas Complexos; Econofísica; Mercados Financeiros; Entropia; Mutual Information; Complexidade de Lempel-Ziv

### **ABSTRACT**

We can describe financial markets as a Complex System, and the application of concepts from areas such as Econophysics and Information Theory provide a basis for understanding their characteristics and patterns. Thus, through the Entropy, Mutual Information (MI) and Lempel-Ziv Complexity (CLZ) calculations we sought to empirically characterize the series of daily stock returns on the São Paulo Stock Exchange between 2014 and 2018. From the results, it was seen that the most entropic days in the series were also those with variations in Ibovespa log returns and volume considerably higher than its daily average, reinforcing the fact that these are configured as days of less redundancy and greater informational content. For MI, the clusters were more delimited than those found via Pearson's Correlation. In CLZ, the low variability of substrings demonstrate a series with cyclic patterns and low complexity.

**Keywords:** Complex Systems; Ecophysics; Financial Markets; Entropy; Mutual Information; Lempel-Ziv Complexity

---

<sup>1</sup> Universidade Estadual Paulista – UNESP. [vinicius.pacheco@unesp.br](mailto:vinicius.pacheco@unesp.br).

<sup>2</sup> Universidade Estadual Paulista – UNESP. [antonio.f.crepaldi@unesp.br](mailto:antonio.f.crepaldi@unesp.br).

## 1. Introdução

Segundo Mantegna e Stanley (2000), os mercados financeiros podem ser descritos como sistemas extremamente bem definidos e complexos, seja pelo fato das regras que os regem serem bastante estáveis e continuamente monitoradas, seja por apresentar comportamentos variados e não-lineares — com números de transações significativos e em escalas temporais ao nível de segundos (dados de alta frequência). Dessa forma, essas características propiciaram que pesquisadores de diversas áreas, sobretudo, aqueles com *backgrounds* relacionados à modelagem de sistemas complexos, como os físicos e matemáticos que de maneira interdisciplinar, introduziram novas abordagens para o estudo dos mercados financeiros, por meio da chamada Econofísica.

Retratando-se um cenário anterior aos estudos econofísicos, era dominante a concepção de que séries temporais que descrevem retornos de ações (amplamente empregados na literatura por meio de logaritmos) eram imprevisíveis (SAMUELSON, 1965). Porém, através da incorporação de ferramentas e procedimentos desenvolvidos *a priori* para modelar sistemas físicos aliada a ótica de que a formação de preços pode ser entendida como um processo estocástico, foi possível construir alicerces que possibilitassem a classificação de instrumentos financeiros de acordo com as suas interdependências (MANTEGNA, 1991), bem como, em um contexto mais atual, propor a estimação de condições informativas para que algoritmos de *Machine Learning* (ML) possam aprender os prováveis resultados (LOPEZ DE PRADO, 2018).

Dentre os conceitos pertinentes à Econofísica estão a entropia proposta por Shannon (1948) e os cálculos de *Mutual Information* (MI) e a complexidade, em especial, a proposta por Ziv e Lempel (1976), as quais serão descritas ao longo da metodologia deste trabalho. A aplicação dessas abordagens permite a caracterização de uma série temporal financeira com o propósito de reconhecer padrões, e assim, separar aquilo que é ruído ou apenas aleatoriedade daquilo que é informação. Uma vez que uma série de preços, por exemplo, ao replicar diretamente informações sobre as forças de oferta e demanda, seria de grande interesse dos agentes econômicos compreendê-las de forma a propor estratégias que maximizem ganhos (LOPEZ DE PRADO, 2018).

O objetivo desse trabalho, portanto, é em caráter empírico, utilizar-se dos cálculos de entropia, *Mutual Information* e Complexidade de Lempel-Ziv para caracterizar e buscar descrever possíveis padrões do mercado acionário brasileiro por meio de séries de retornos diários de ações da Bolsa de Valores de São Paulo – Brasil entre os períodos de 2014 a 2018.

## 2. Metodologia

A pesquisa utilizou-se de um conjunto de dados referente às composições diárias da carteira teórica do Índice Bovespa (IBOVESPA) — benchmark de referência do mercado brasileiro — do período de 2002 a 2018. Desse conjunto de dados, extraiu-se uma cesta de ações que possuíam maior frequência na composição do índice. Posteriormente, tendo-se os códigos de negociação selecionados, por meio da API de dados do site *Investing.com* e do uso da biblioteca

*investpy* implementada via linguagem de programação *Python* foi possível se obter séries de preços diários das ações dos anos de 2014 a 2018. A escolha do período para a série de preços decorre da busca de se minimizar a influência da mudança metodológica para a composição do IBOVESPA, bem como maximizar a presença de ações ainda operantes no mercado.

As diferentes séries foram analisadas utilizando janelas temporais com diferentes amplitudes, além de sua transformação em séries em log retornos, conforme a equação 1:

$$r_t = \ln\left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right) \quad (1)$$

Sendo:

$r_t$  : Log Retorno

$p_t$  : Preço no tempo final

$p_t - 1$  : Preço no tempo inicial

As séries de log retornos foram as bases para os cálculos da entropia, *Mutual Information* e da Complexidade de Lempel-Ziv, além das análises exploratórias secundárias utilizando-se os conceitos de Correlação de Pearson, Rede Hierárquica, a Fronteira Eficiente baseada na Teoria Moderna do Portfólio de Markowitz (1959), o Método de Monte Carlo (MMC) (HALTON, 1970) para a simulações de carteiras e o Índice de Sharpe (apresentado pela equação 2) para obter-se a que maximize a relação de risco e retorno do período analisado. Cabe ressaltar que esses métodos foram utilizados para contribuir com as análises foco deste trabalho.

$$IS = \frac{(r_i - r_f)}{\sigma_p} \quad (2)$$

Sendo:

$IS$ : Índice Sharpe

$r_i$ : Log Retorno do ativo

$r_f$ : Retorno da Taxa Livre de Risco

$\sigma_p$ : Desvio Padrão da Carteira (risco)

## 2.1 Entropia

Como definida por Shannon (1948), a entropia é a quantidade média de informações em *bits* ou *nats* (em mensagens longas) produzidas por uma fonte de dados. Matematicamente, portanto, o autor definiu a entropia de uma variável aleatória discreta  $X$  com valores possíveis  $x \in A$ , em que  $A$  é o espaço amostral, como:

$$H(X) = -\sum_{x \in A} p(x) \cdot \log_2 p(x) \quad (3)$$

Sendo:

$H(X)$  : Entropia

$p(x)$  : Probabilidade amostral

Para a análise da série, calculou-se a entropia referente aos retornos individuais de cada uma das ações, com arredondamento em 3 casas decimais, e a entropia diária do conjunto de ativos em janelas temporais de diferentes amplitudes, bem como uma análise da distribuição de probabilidade dos dados sob o ponto de vista da normalidade.

## 2.2 Mutual Information

A Mutual Information (MI), por sua vez, possui uma relação intrínseca com o estudo da entropia, em especial com a relativa, conhecida na literatura como a distância de Kullback-Leibler entre distribuições de probabilidade  $p$  e  $q$  (COVER; THOMAS, 1991). Define-se, portanto, como:

$$MI(X, Y) = \sum \sum P(x, y) \log \left( \frac{P(x, y)}{P(x)P(y)} \right) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) \quad (4)$$

Sendo:

$MI(X, Y)$ : Informação Mútua

$P(x, y)$ : Distribuição de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$

$P(x)$  e  $P(y)$ : Funções de probabilidade de distribuição marginal de  $X$  e  $Y$

$H(X)$  e  $H(Y)$ : Entropias Marginais

$H(X|Y)$  e  $H(Y|X)$ : Entropias Condicionais

Sendo assim, tem-se MI para duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  com probabilidade conjunta  $P(x, y)$  e probabilidades marginais  $P$ , podendo ser descrita também em função da função das entropias conjuntas ( $H(X)$ e $H(Y)$ ) e condicionais ( $H(X|Y)$ e $H(Y|X)$ ).

A MI é sempre não negativa, simétrica e igual a zero se, e somente se  $X$  e  $Y$  são independentes. Para variáveis normalmente distribuídas, a MI está intimamente relacionada à conhecida Correlação de Pearson (LOPEZ DE PRADO, 2018).

A MI, portanto, como exposto por Hausser e Strimmer (2009), é uma medida natural da associação entre variáveis, independentemente de serem de natureza linear ou não linear.

A partir do cálculo de MI, confeccionou-se uma matriz de MI que relacionou as ações uma a uma e a construção de uma rede hierárquica baseada em uma Árvore Geradora Mínima (Minimum Spanning Tree - MST).

## 2.3 Complexidade de Lempel-Ziv

Sabendo-se que a entropia pode ser interpretada como uma medida de complexidade e que uma sequência complexa contém mais informações do que uma sequência regular (previsível), o algoritmo para o cálculo da Complexidade de Lempel-Ziv (CLZ) decompõe de forma eficiente uma mensagem em substrings não redundantes (ZIV; LEMPEL, 1976).

Dessa forma, a série é transformada em uma sequência binária de 0 e 1, conforme o valor original ( $r_t$ ) seja menor ou maior que um valor limite ( $T$ ), que na pesquisa é a média dos valores da série. Por exemplo, uma série de retornos,  $r_t$ , de um ativo pode ser codificado de acordo com o sinal, 1 para  $r_t \geq T$  e 0 para  $r_t < T$ , removendo casos em que  $r_t = 0$  (LOPEZ DE PRADO, 2018).

Então, as diferentes subsequências formadas, medidas pelas sucessivas atualizações da complexidade  $c(n)$ , sendo no tamanho da subsequência, representarão a medida de complexidade. Entretanto, para que esta medida seja independente do tamanho da série, é necessário normalizar  $c(n)$ . Assim, a complexidade normalizada será (YOU-FU et al., 2013):

$$0 \leq CLZ = \frac{c(n)}{b(n)} \leq 1 \quad (5)$$

Onde,  $b(n) = n/\log_2(n)$ .

Para a CLZ buscou-se analisar a seu comportamento diário e sua respectiva distribuição de probabilidade sob o ponto de vista da normalidade.

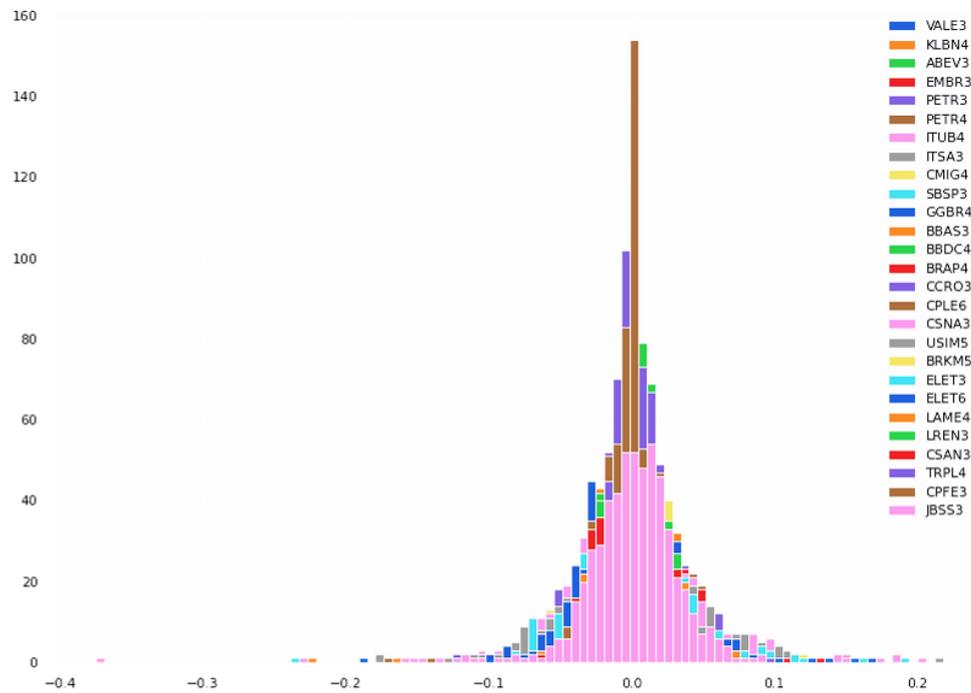
## 3. Resultados

Inicialmente, buscou-se realizar uma análise exploratória das séries de log retornos, a fim de contribuir posteriormente com o estudo dos resultados da Entropia, Mutual Information e a Complexidade de Lempel-Ziv.

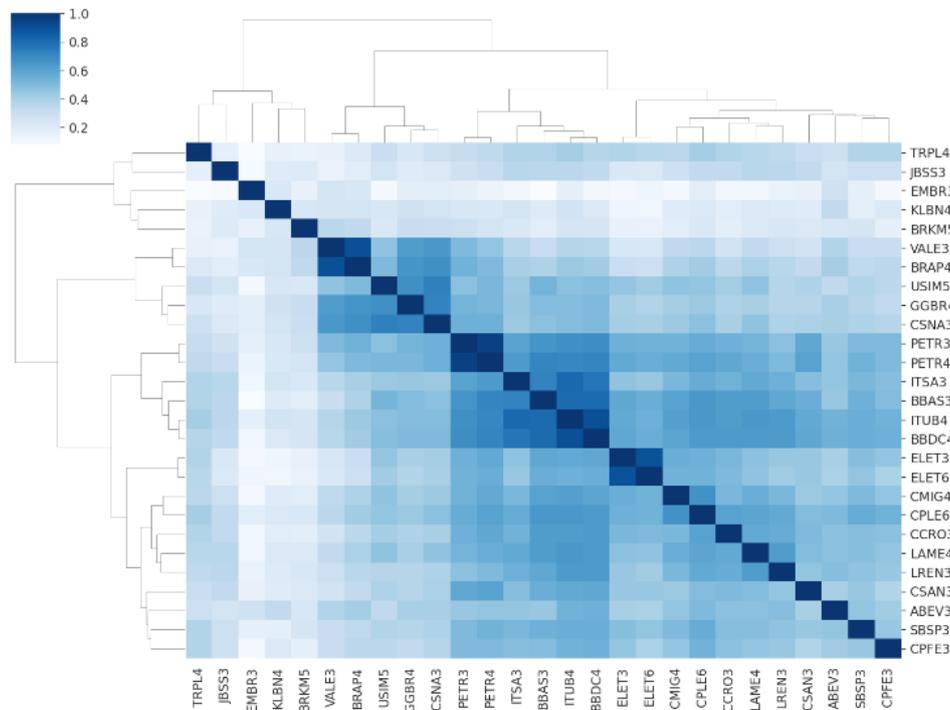
### 3.1 Retornos

A partir dos log retornos diários das ações, obteve-se suas respectivas frequências de distribuição, assim como construiu-se uma matriz de correlação, em formato de mapa de calor e dendrograma.

**Figura 1-** Frequência de Distribuição



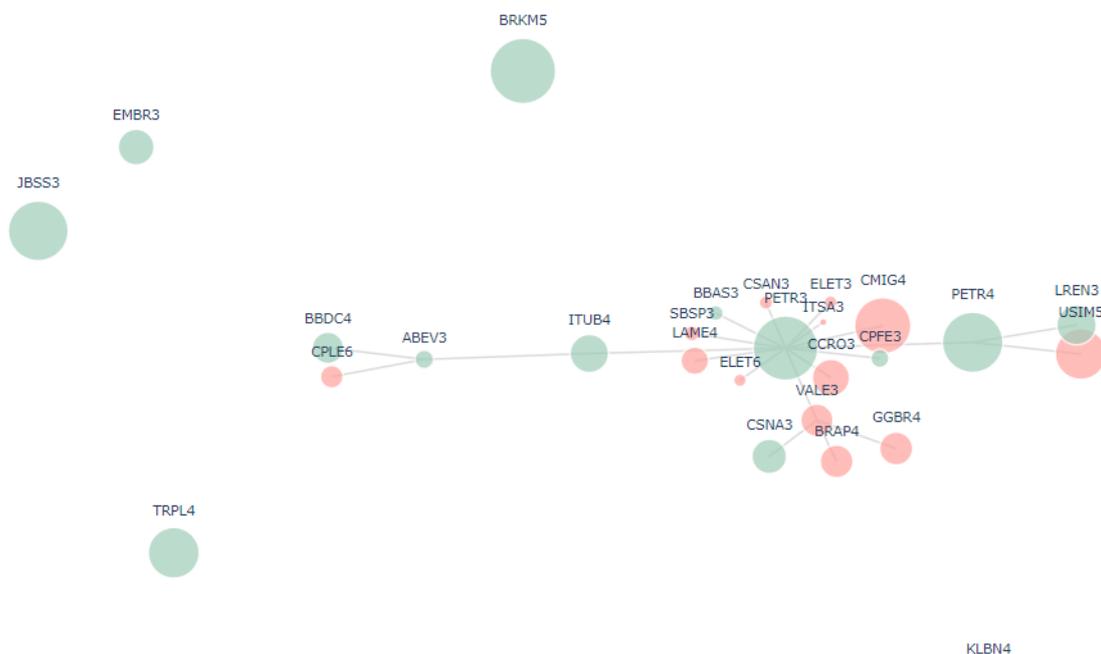
**Figura 2-** Matriz de Correlação dos Log Retornos



Aplicou-se o teste de normalidade à distribuição de frequência e observou-se que, exceto para os ativos KLB4 e BRAP4, os demais ativos apresentaram *p-valor* (que representa a probabilidade de uma estatística *qui-quadrado*) inferior a 0,05 e, portanto, a hipótese de normalidade foi rejeitada. Acerca da Matriz de Correlação, os ativos mais correlacionados, foram aqueles que eram da mesma companhia, e entre *holdings* e companhias alvo de seus investimentos, porém, observou-se também, evidenciado pelos *clusters* do dendrograma, que há, em geral, altas correlações entre empresas de mesmo setor de atuação.

Posteriormente, propôs-se a construção de uma Árvore Geradora Mínima (MST) com base nos valores de correlação anteriormente calculados. Nessa MST os nós apresentam tamanhos proporcionais e coloração referente aos retornos anualizados dos ativos, como observado na figura 2:

**Figura 3-** Árvore Geradora Mínima (MST)

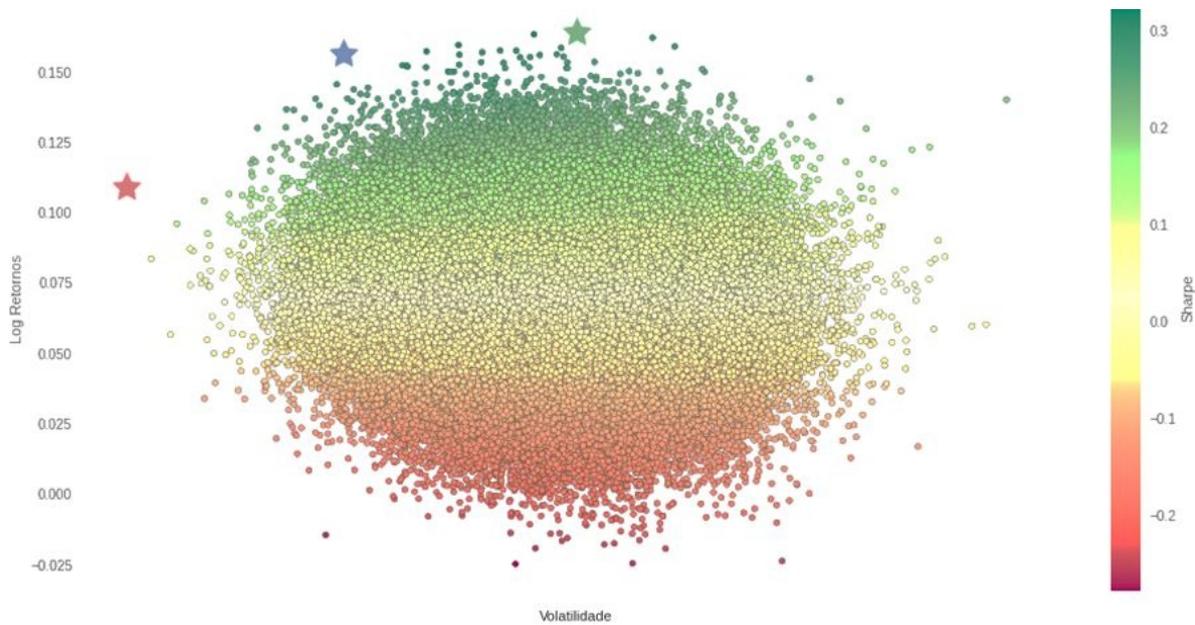


**Fonte:** Elaborado pelos autores, 2021.

A partir da figura 2 pode-se observar com maior profundidade a formação dos *clusters*, com destaque aos nós que representam os ativos de PETR3, PETR4, ITUB4 e VALE3 que contêm os maiores números de arestas (conexões).

Com o conjunto de ativos, buscou-se avaliar o comportamento dos log retornos e de sua volatilidade simulando a composição de duzentas mil carteiras através do método de Monte Carlo (MMC). Como resultado, obteve-se, como apresentada na Figura 4, uma Fronteira Eficiente na qual foi possível se identificar carteiras com mínimo risco (representada pela estrela vermelha) e máximo retorno (representada pela estrela verde), além daquela considerada ótima (representada pela estrela verde) – dada pela maximização do Índice de Sharpe.

**Figura 4-** Fronteira Eficiente



Fonte: Elaborado pelos autores, 2021.

**Tabela 1** – Carteiras de Mínimo Risco, Máximo Retorno e Ótima

Carteira Mínimo Risco		Carteira Máximo Retorno	Carteira Ótima
Ativos	Participação (%)	Participação (%)	Participação (%)
ABEV3	9,04	3,60	2,64
BBAS3	2,37	5,70	8,59
BBDC4	1,67	2,88	4,28
BRAP4	0,14	1,86	5,50
BRKM5	9,40	8,01	8,43
CCRO3	0,84	1,63	2,06
CMIG4	0,21	0,17	0,00
CPFE3	0,32	3,22	0,17
CPLE6	1,97	2,94	2,36
CSAN3	7,99	3,35	0,07
CSNA3	0,51	5,06	2,99
ELET3	2,44	5,75	1,28
ELET6	2,62	0,26	1,08
EMBR3	7,82	0,82	8,44
GGBR4	2,20	5,57	1,83
ITSA3	8,64	2,91	2,15

ITUB4	3,00	9,66	3,45
JBSS3	8,24	2,02	8,61
KLBN4	8,05	0,59	4,24
LAME4	4,99	0,52	0,90
LREN3	2,66	4,30	7,34
PETR3	0,01	5,90	4,77
PETR4	1,54	6,67	1,00
SBSP3	3,92	4,55	8,81
TRPL4	5,37	9,59	7,78
USIM5	1,10	0,24	1,21
VALE3	2,95	2,24	0,04

**Fonte:** Elaborado pelos autores, 2021.

**Tabela 2** – Log Retornos, Volatilidades de Índices de Shape das carteiras simuladas

Carteiras	Log Retorno (%)	Volatilidade (%)	Índice de Sharpe
Mínimo Risco	10,88	25,40	0,18
Máximo Retorno	16,42	32,40	0,31
Ótima	15,64	28,75	0,33

**Fonte:** Elaborado pelos autores, 2021.

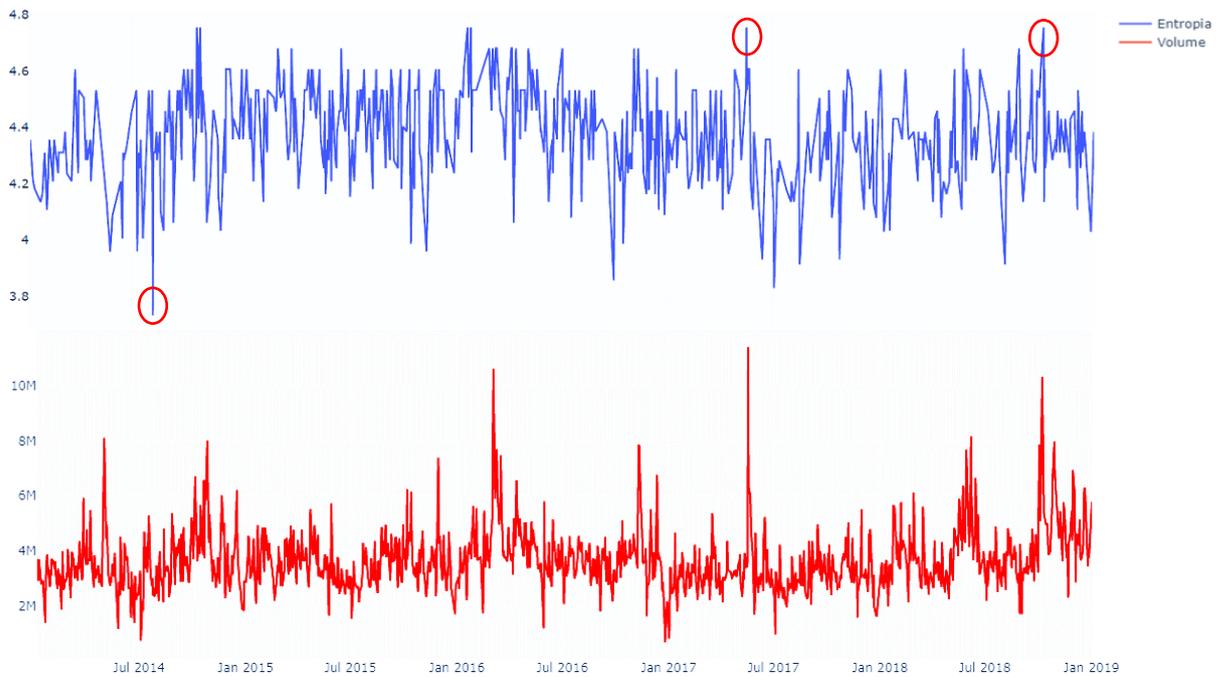
Dos resultados obtidos, da cesta de ações que buscou replicar o mercado brasileiro, o portfólio que apresentou o máximo log retorno do período de análise foi também aquele que concentrou suas posições em um número menor número de ativos, ao contrário da carteira ótima, que conteve participações mais diversificadas, amparando-se assim nas conclusões obtidas em Markowitz (1959).

### 3.2 Entropia

Em entropia, pôde-se obter da série de log retornos do conjunto de ações distribuídos ao longo do período de estudo uma amplitude de [3,73; 4,75] *bits*, com a hipótese de normalidade rejeitada (*p-valor* igual a 0,0008), e por meio dela se observar que os maiores registros (picos) estiveram associados com mais frequência aos dias de variações de log retornos acima da média do IBOVESPA (aproximadamente de 0,47% ao dia no período), seja os positivos ou os negativos, como em 08 de outubro de 2018 quando o índice fechou o pregão com alta de 4,4% e no dia 18 de maio de 2017 após encerrar o dia com forte queda de 9,2%, registrando *circuit breaker* durante o pregão. Em relação aos vales da série, temos exemplos de ocorrências de desempenho do índice próximo ao da média, como em 07 de agosto de 2014 com retorno log de 0,53%. A correlação entre as variáveis de log retorno do IBOVESPA e a Entropia do conjunto de ativos foi de 0,009. Outro dado interessante foi registrado entre a correlação do Volume diário da bolsa e a Entropia da série (0,40).

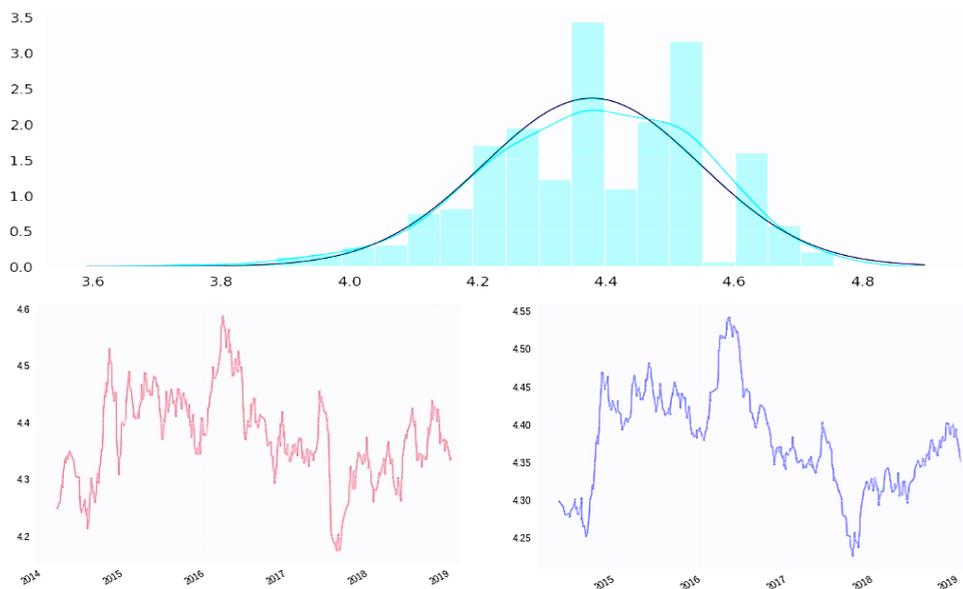
Vale pontuar que ao criar janelas com médias móveis de 15 e 30 dias para a Entropia da série, após o pico registrado em 2016, viu-se em seguida uma redução de *bits* até meados de maio de 2017 (quando a entropia voltou a aumentar) para posteriormente atingir seu mínimo patamar no final do mesmo ano. A tendência registrada logo após, foi de crescimento da entropia até o final da série.

**Figura 4-** Entropia da Série e Entropia *versus* Volume diário



Fonte: Elaborado pelos autores, 2021.

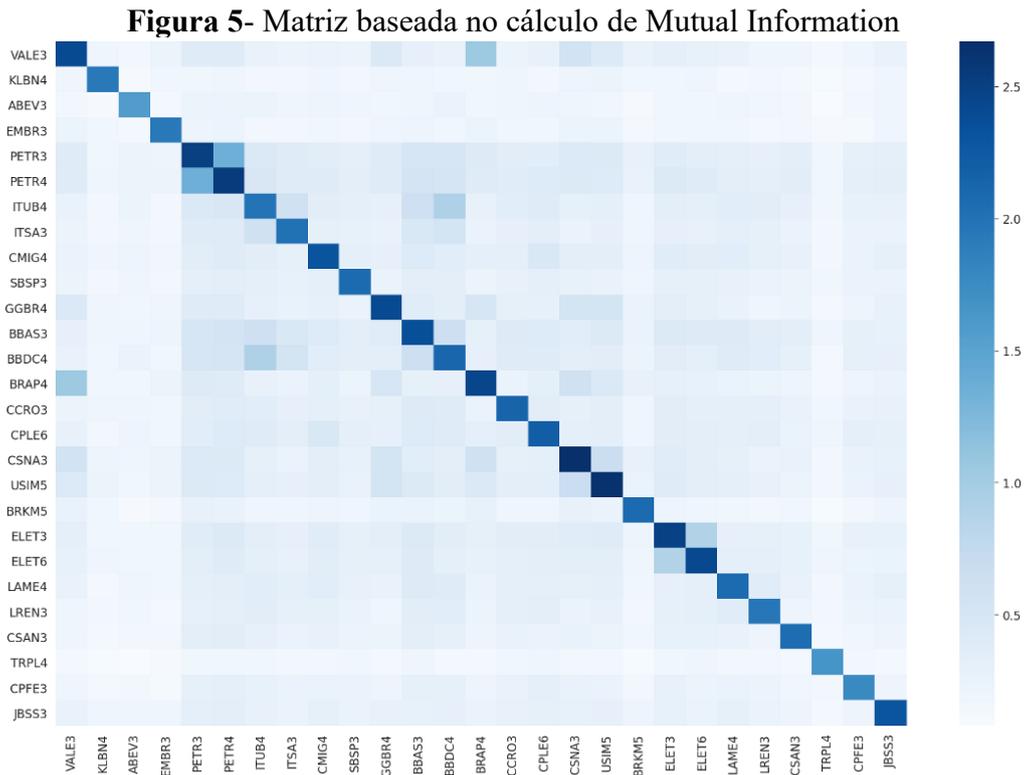
**Figura 5-** Distribuição e Entropia da Série com média móvel de 15 e 30 dias



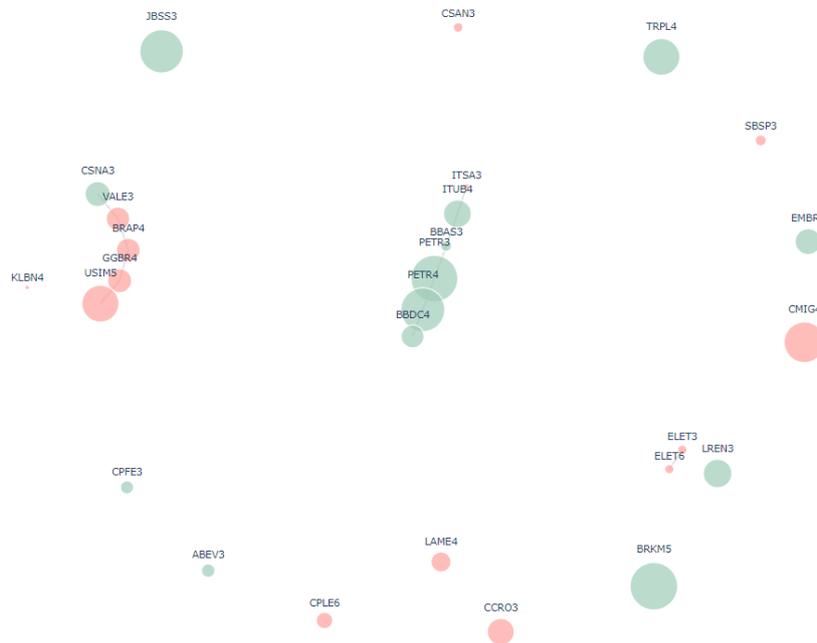
Fonte: Elaborado pelos autores, 2021.

### 3.3 Mutual Information

Para a aplicação do Mutual Information (MI), criou-se uma Matriz e uma MST entre os ativos, apresentadas a seguir:



Fonte: Elaborado pelos autores, 2021.

**Figura 6-** MST baseada no cálculo de Mutual Information

**Fonte:** Elaborado pelos autores, 2021.

A partir da figura 5, pode-se observar que, em MI, a formação de *clusters*, embora menos intensa no mapa de calor, é percebida pela disposição e formação dos nós da MST, sendo assim, podemos interpretar ambos os visuais tal como foi realizado para o cálculo de correlação. Porém, é válido pontuar que, analisando-se os maiores valores de MI entre ações, destacou-se aquele entre as ações da BRAP4 e VALE3 (1,1 *bits*), que em pôde ser explicado por meio do fato de BRAP4 ser uma holding com alta exposição de investimento em VALE3 (detendo cerca de 6% das ações da mineradora).

### 3.4 Complexidade de Lempel-Ziv

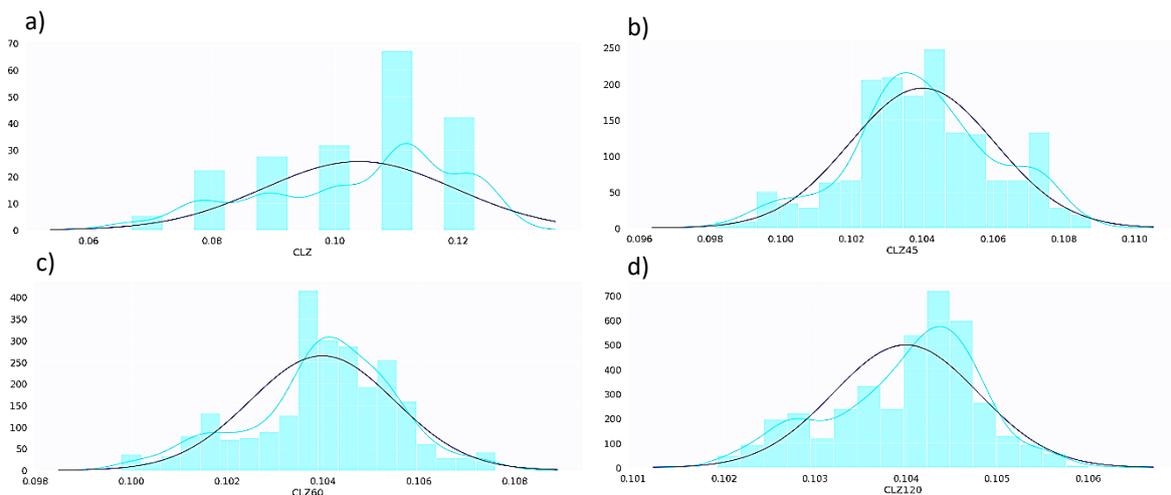
Por meio do cálculo de CLZ, foi possível observar certa convergência entre os resultados quando as subsequências de binários (*substrings*) são analisadas ao longo da série diária de log retornos do conjunto de ações — que esteve no intervalo de [0,07;0,12] *bits*. Tal constatação pôde ser obtida por meio da observação da distribuição de frequência dos resultados da complexidade em janelas de médias móveis de 45, 60 e 120 dias. Quando buscamos analisar à hipótese de normalidade para as distribuições de CLZ, obteve-se:

**Tabela 1** - Distribuição de CLZ e *p*-valor respectivamente da série das médias móveis de 45, 60 e 120 dias

Distribuição	<i>p</i> -valor
CLZ de toda a série	0,00001
CLZ média móvel de 45 dias	0,48735
CLZ média móvel de 60 dias	0, 00057
CLZ média móvel de 120 dias	0, 00021

Fonte: Elaborado pelos autores, 2021

**Figura 6-** Distribuição de CLZ (a) respectivamente da série e em médias móveis de 45 (b), 60 (c) e 120 dias (d)



Fonte: Elaborado pelos autores, 2021

#### 4. Considerações Finais

O presente artigo buscou, por meio dos cálculos de Entropia, Mutual Information e da Complexidade de Lempel-Ziv identificar empiricamente possíveis características para o mercado acionário brasileiro, podendo-se concluir, portanto, que em termos de Entropia, foi possível verificar que em dias de picos, como apontado por Lopez de Prado (2018), como em dias de menor redundância e maior a conteúdo informativo, a ocorrência de variações de log retornos e volume do

IBOVESPA foram consideravelmente superiores à sua média diária. Além de ser possível identificar patamares menores de *bits* pós-2016 e com tendência de crescimento após 2017.

Fica indicado à estudos futuros tecer inferências acerca de como a atual cadeia de preços nos diz o grau da eficiência do mercado brasileiro, identificando fatores ou eventos do universo político-econômico que corroborem com os resultados obtidos neste estudo, bem como proposto por Fiedor (2014), por meio de sinais das séries temporais de log retornos via entropia, verificar através de *backtests* se estratégias que buscam a maximização dos preços de ativos se fazem mais rentáveis.

Acerca do cálculo de Mutual Information para a série, constatou-se forte relação entre os resultados alcançados com aqueles obtidos via Correlação de Pearson. Porém o destaque para a MI ficou entre ativos que, como exposto pela Árvore Geradora Mínima, apresentaram *clusters* mais delimitados, respeitando setores de atuação, além de *holdings* cujo investimento era considerável em ações da cesta de ativos analisada.

Para estudos posteriores, recomenda-se a análise do comportamento de MI diário, a fim de se verificar a ocorrência de sinais de informação entre dias com variações de retornos consideráveis, além de como a MI se comporta ao longo do tempo e como isso afeta os *clusters* identificados em MST. Vale lembrar que este tópico seria de grande interesse para os estudos de estratégias de gestão de portfólios, uma vez que fica recomendada investigação de como as carteiras simuladas via MMC e a Fronteira Eficiente de Markowitz (1959) vistas neste trabalho modelam seu retorno esperado e risco com base em modificações motivadas por MI entre ativos. Outra proposta interessante seria calcular as medidas de centralidade da MST, buscando-se descobrir quais são os nós mais importantes ou influentes na rede.

Por fim, no cálculo da Complexidade de Lempel-Ziv, notou-se que a série apresentou amplitude que representou baixa variabilidade dos componentes de frequência de *strings*, e que segundo Lempel e Ziv (1976), pode ser interpretada como de uma série com padrões cíclicos, com baixa complexidade. Além disso, os comportamentos de distribuição em diferentes janelas de temporais, seja em 45, 60 e 120 dias podem representar que, para a série de estudo, a criação de diferentes intervalos de análise e seu acompanhamento, pode permitir conhecer melhor a interação com outras variáveis, como entropia, por exemplo.

Dessa forma, cabe à estudos futuros verificar o comportamento de CLZ ao longo do tempo, com janelas que permitam compreender convergências, e como a complexidade de diferentes ativos pode ajudar a compor estratégias de gestão de portfólios. É válido também que estudos podem buscar para a mesma série de log retornos, assim como proposto por Kontoyiannis (1998), fazer um uso mais eficiente da informação disponível em uma mensagem por meio de estimação da Taxa de Entropia de Shannon via CLZ.

## Referências

- COVER, T.M.; THOMAS, J.A. *Elements of Information Theory*. 1. ed. Nova Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 1991.
- FIEDOR, P. Frequency effects on predictability of stock returns. *In: IEEE CONFERENCE ON COMPUTATIONAL INTELLIGENCE FOR FINANCIAL ENGINEERING & ECONOMICS (CIFER)*, 2014, Londres. *Proceedings*. Londres: IEEE XPLORE, 2014. p. 247-254, doi: 10.1109/CIFEr.2014.6924080.
- HALTON, John H. *A retrospective and prospective survey of the Monte Carlo method*. *Siam review*, v. 12, n. 1, p. 1-63, 1970.
- HAUSSER, J.; K. STRIMMER. Entropy inference and the James-Stein estimator, with application to nonlinear gene association networks. *Journal of Machine Learning Research*, v.10, 2009.
- KONTOYIANNIS, I. *Asymptotically Optimal Lossy Lempel-Ziv Coding*. IEEE International Symposium on Information Theory. Cambridge: MIT, 1998
- KONTOYIANNIS, I. Asymptotically optimal lossy Lempel-Ziv coding. *In: IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON INFORMATION THEORY, 1998*, Cambridge. *Proceedings*. 1998, Cambridge: IEEE XPLORE, 1998, p. 273, doi:10.1109/ISIT.1998.708878.
- LEMPEL, A.; ZIV, J. On the complexity of finite sequences. *IEEE Transaction on Information Theory*, v.22, n.1, 1976.
- LOPEZ DE PRADO, Marcos. *Advances in Financial Machine Learning*. 1. ed. Nova Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2018.
- MARKOWITZ, Harry. *Portfolio selection: eficiente diversification of investments*. New Haven: Yale University Press, 1959.
- SAMUELSON, Paul A. Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly. *Industrial Management Review Spring*. 1965. p. 6-41.
- SHANNON, C.E. A Mathematical Theory of Communication. *Bell System Technical Journal*, v.27, 1948.
- YOU-FU, T.; SHU-LIN, L.; RUI-HONG, S.; YING-HUI, L. Correlation between detrended fluctuation analysis and the Lempel-Ziv complexity in nonlinear time series analysis. *Chin. Phys. B*, v. 22, n. 3, 2013.

**Recebido:** 02/12/2021

